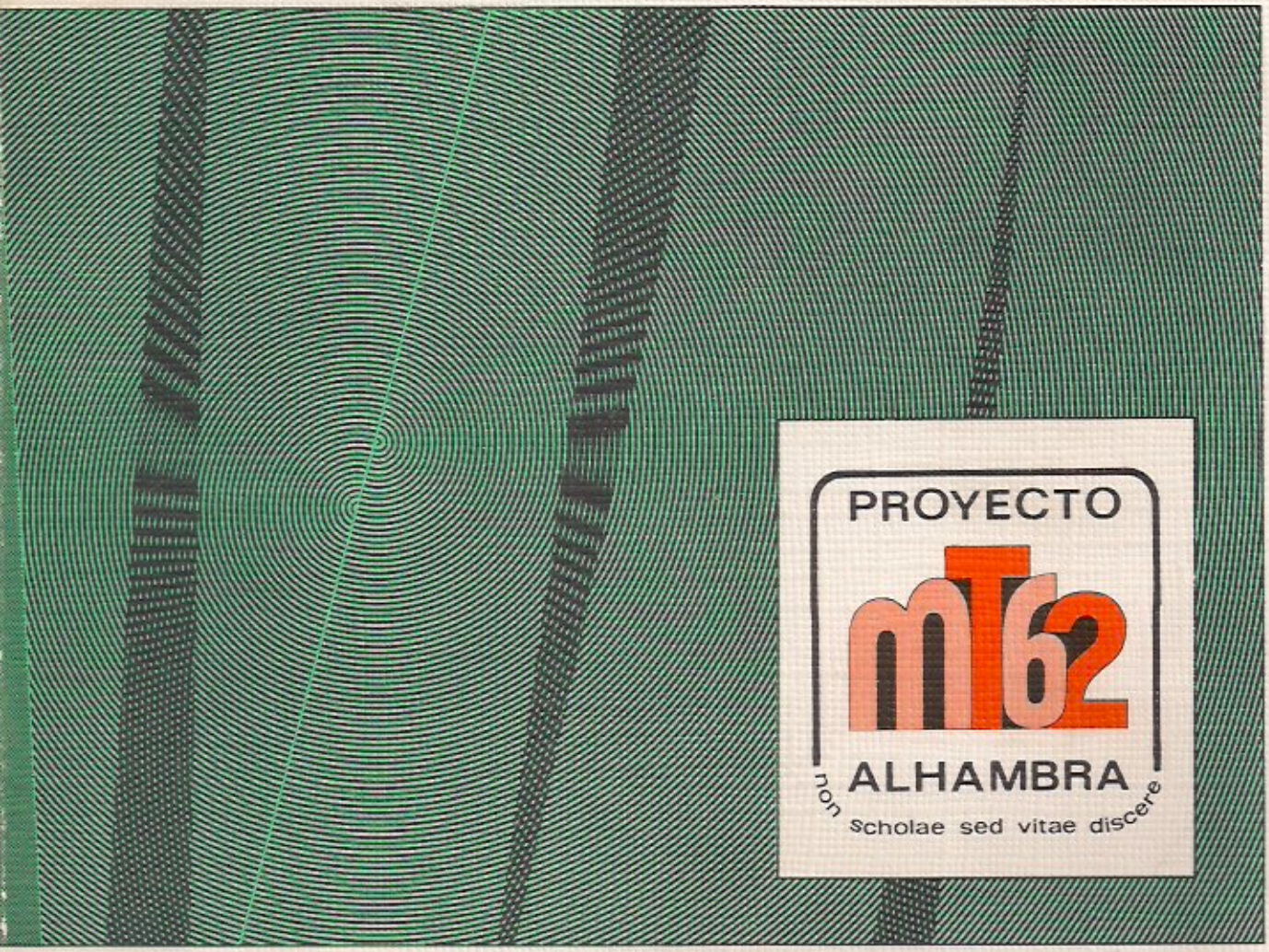
SERIE A

Curso de MATEMATICAS

Orientación Universitaria

A. NEGRO · V. ZORIO



1-47

PROYECTO **MT-62** ALHAMBRA

COMITE EDITORIAL

Adolfo Negro

Jefe del Departamento de Matemáticas del C.N.S.R. de Madrid. Profesor del I.C.E. de la Universidad de Deusto

Fernando Marín Alonso

Jefe del Departamento de Física del C.N.S.R. de Madrid
Profesor del C.U. de Madrid

José M. Esteban

Profesor de Química de la E.T.S. de Ingenieros de Montes de la Universidad Politécnica de Madrid

Departamentos

Coordinación, control y seguimiento
Ciencias de la Naturaleza
Ciencias de la Educación
Lengua y Literatura
Socioantropología
Matemáticas
Química
Física

PROYECTO

m62

ALHAMBRA

non scholae sed vitae discere

Curso de MATEMATICAS

Orientación Universitaria

ADOLFO NEGRO
VALERIANO ZORIO

Alhambra

Primera edición, 1978

EDITORIAL ALHAMBRA, S. A.
R. E. 182
Madrid-1. Claudio Coello, 76

Delegaciones:

Barcelona-8. Enrique Granados, 61
Bilbao-14. Doctor Albiñana, 12
La Coruña. Pasadizo de Pernas, 13
Málaga. La Regente, 5
Oviedo. Avda. del Cristo, 9
Sevilla-12. Reina Mercedes, 35
Valencia-3. Cabillers, 5

México

Editorial Alhambra Mexicana, S. A.
México 6, D.F. Londres, 25, 4.ª planta
Apartado postal 61-275

Rep. Argentina

Editorial Siluetas, S. A.
Buenos Aires-1201. Bartolomé Mitre, 3745/49

Perú

Editia Peruana, S. R. Ltda.
Lima. José Díaz, 208

n c 25010030

© Es propiedad de los autores.
Reservados todos los derechos.

ISBN 84-205-0592-7

Depósito legal: M. 24105-1978

Impreso en España - Printed in Spain

Selecciones Gráficas - Carretera de Irún, km. 11,500 - Madrid (1978)

Indice general

Capítulos *Páginas*

1 Matrices. Determinantes 1

Matriz de una aplicación lineal, 1. Operaciones con matrices del mismo orden, 4. Inversiones de una permutación, 9. Determinante. Definición, 10. Determinantes de segundo y tercer orden. Regla de Sarrus, 11. Propiedades de los determinantes, 12. Adjunto y menor complementario de un elemento, 14. Matriz inversa de una matriz cuadrada, 16. Menores de una matriz. Menor orlado, 18. Combinaciones lineales de filas y columnas. Rango de una matriz, 19. Proposiciones relativas a dependencia lineal de filas y columnas, 20. Teorema del rango, 21. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 22.

2 Sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché 25

Sistemas de ecuaciones lineales. Definiciones, 25. Sistemas de n ecuaciones con n incógnitas, 26. Resolución en el caso general de un sistema de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché-Fröbenius, 28. Sistemas homogéneos, 30. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 33.

3 Espacio afín y euclídeo de dimensión 3. Variedades lineales. Problemas de incidencias y métricos 35

Espacio afín, 35. Biyección entre los puntos de E_0 y los vectores libres de V_3. Referencia de coordenadas, 36. Recta en el espacio afín, 37. Plano en el espacio afín, 38. Posiciones relativas de dos y tres planos, 40. Haz de planos, 42. Rectas paralelas, 43. Paralelismo de recta y plano, 44. Dependencia lineal en espacios afines. Variedades lineales, 45. Espacio euclídeo. Estructura métrica, 48. Regularidad de la matriz fundamental U, 48. Coordenadas contravariantes y covariantes, 51. Expresiones diversas del producto escalar, 51. Perpendicularidad, 52. Angulos, 54. Distancias, 56. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 58.

4 Areas y volúmenes 61

Introducción, 61. Area del triángulo, 62. Area de un polígono convexo, 63. Area de la proyección de un polígono sobre un plano, 64. Area de un polígono en el espacio euclídeo, 66. Volúmenes de poliedros. Conceptos, 67. Expresión analítica de los volúmenes del paralelepípedo y del tetraedro, 70. Volúmenes de poliedros. Cálculo, 70. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 72.

5 Geometría de las congruencias y de las semejanzas 74

Introducción, 74. Concepto elemental de congruencia, 74. La congruencia como transformación, 75. Ecuaciones de las transformaciones de traslación y rotación, 76. Ecuaciones de la transformación de simetría, 78. Afinidades, 79. Definición de transformaciones de congruencia, 82. Orientación en el plano afín, 83. Clasificación de las congruencias, 85. Congruencias en el espacio tridimensional, 87. Semejanza, idea elemental, 88. Transformaciones de semejanza. Clasificación. 89. Homotecias. Descomposición de semejanzas, 92. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 94.

Capítulos *Páginas*

6 Aproximación lineal. Derivada y diferencial 96

Aproximación de una función por otra en un punto, 96. Aproximación lineal de una función en un punto, 97. Derivada de una función en un punto, 98. Diferencial de una función de un punto, 100. Continuidad de la función derivable, 101. Cálculo de derivadas, 102. Curvas osculatrices a una curva en un punto, 105. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 107.

7 Funciones derivables. Estudio local. Gráficas 108

Variación de una función acotada, 108. Variación de una función derivable, 111. Teorema de Rolle, 112. Teorema de Cauchy, 114. Teorema de la media generalizada, 116. Desarrollo de Taylor, 118. Aplicaciones del desarrollo de Taylor, 121. Concavidad, convexidad e inflexiones, 123. Dibujo de gráficas de funciones explícitas, 128. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 133.

8 Separación y aproximación de raíces reales. Interpolación 135

Introducción, 135. Separación de raíces, 136. Acotación de las raíces de una ecuación, 138. Criterios de separación, 140. Aproximación de raíces, 142. Método de Newton, 145. Aproximación de una raíz por sucesiones monótonas convergentes, 148. Por interpolación. Introducción, 151. Polinomios de interpolación 151. Fórmula de interpolación de Lagrange, 152. Algoritmo de Aitken, 153. Otro método general, 155. Interpolación con puntos de abscisas equidistantes. Método de Newton, 156. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 161.

9 Estudio de algunas curvas planas. Concepto de curva. Curvatura 162

Introducción. Referencia polar, 162. Ecuaciones de la recta en coordenadas polares, 163. Ecuación cartesiana y polar de la circunferencia, 165. Elipse, hipérbola y parábola, 167. Ecuaciones de las cónicas en coordenadas polares, 170. Secciones de un cono de revolución, 171. Curvas polinómicas, 172. Curvas exponencial y logarítmica, 175. Curvas correspondientes a las funciones hiperbólicas, 177. Curvas trigonométricas, 181. Curvas. Definición, 183. Curvas y gráficas de funciones, 188. Concepto de curvatura. Centro y radio, 191. Cálculo de la curvatura. Coordenadas del centro, 194. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 196.

10 Idea elemental de superficies. Curvas alabeadas 197

Introducción. Referencias de coordenadas cilíndricas y esféricas, 197. Superficie. Concepto. Formalización, 200. Función real de dos variables reales, 204. Distintas formas de expresar la ecuación de una superficie, 207. Superficies elementales, 208. Curvas alabeadas. Concepto. Formalización, 215. Distintas formas de expresar las ecuaciones de una curva, 216. Estudio de algunas curvas: cúbicas, hélices, 217. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 219.

11 Integrales indefinidas 221

Definición de integral indefinida o función primitiva, 221. La función primitiva no es única, 221. Funciones integrables, 222. Integrales inmediatas, 223. Funciones hiperbólicas, 224. Derivación e integración de funciones hiperbólicas e inversas, 227. Carácter lineal de la integración, 229. Método de sustitución, 229. Integración por partes, 230. Integración por reducción, 231. Integración de funciones racionales, 232. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 237.

12 Area. Integral definida. Aplicaciones 239

Introducción, 239. Medida de áreas de regiones poligonales, 239. El problema general del área, 241. Definiciones de área, 242. Integral definida, 243. Integración de Riemann de una función continua, positiva y monótona, 245. Integración de una función monótona, continua y negativa, 248. Integración de una función continua, 250. Teorema de Barrow, 251. Funciones definidas por integrales, 252. Integración de Riemann de funciones no continuas, 253. Elementos diferenciales de longitudes, areas y volúmenes, 254. Aplicaciones, 258. Métodos numéricos de integración. Generalidades. Métodos de Newton-Cotes, 262. Otros métodos de cálculo. Método de Gauss, 265. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 267.

Capítulos *Páginas*

13 Sucesos aleatorios 271

Introducción, 271. Experiencia o prueba. Sucesos elementales. Espacio muestral, 272. Sucesos compuestos. Sucesos seguros, 272. Conjunto-potencia de un espacio muestral *h*, 273. Orden e igualdad en el conjunto *P(H)*, 274. Operaciones con sucesos, 275. Sistema completo de sucesos, 279. Leyes del álgebra de sucesos. El álgebra de Boole de los sucesos estocásticos, 279. Principio de dualidad, 280. Teorema, 280. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 283.

14 Frecuencia y probabilidad 285

Introducción, 285. Experiencias reales y simuladas. Tabla de dígitos aleatorios, 287. Frecuencias absoluta y relativa, 292. Probabilidad, modelo matemático de la frecuencia, 296. Técnica de resolución. Diez problemas resueltos, 309. Aplicabilidad. Automatismos y destrezas, 314.

1

Matrices. Determinantes

1.1. MATRIZ DE UNA APLICACION LINEAL

Considérense los espacios vectoriales, referidos a las bases que se indican:

Espacio vectorial $\mathfrak{A}$
dimensión: m
base $= (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots \bar{p}_m)$
$\bar{x} \in \mathfrak{A}$
$\bar{x} = x_1\bar{p}_1 + x_2\bar{p}_2 + \cdots + x_m\bar{p}_m$ [1]

Espacio vectorial $\mathfrak{B}$
dimensión: n
base $= (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots q_n)$
$\bar{y} \in \mathfrak{B}$
$\bar{y} = y_1\bar{q}_1 + y_2\bar{q}_2 + \cdots + y_n\bar{q}_n$ [2]

Una aplicación lineal A, del espacio vectorial $\mathfrak{A}$ en el espacio vectorial $\mathfrak{B}$, hace corresponder a cada vector $\bar{x} \in \mathfrak{A}$, un vector $\bar{y} \in \mathfrak{B}$

$$\begin{array}{c} \mathfrak{A} \xrightarrow{A} \mathfrak{B} \\ \bar{x} \longrightarrow \bar{y} = A(\bar{x}) \end{array}$$

$$\bar{y} = A(x_1\bar{p}_1 + x_2\bar{p}_2 + \cdots + x_m\bar{p}_m) = x_1 \cdot A(\bar{p}_1) + x_2 \cdot A(\bar{p}_2) + \cdots + x_m \cdot A(\bar{p}_m) \quad [3]$$

Si

$$\begin{aligned} A(\bar{p}_1) &= a_{11}\bar{q}_1 + a_{21}\bar{q}_2 + \cdots + a_{n1}\bar{q}_n \\ A(\bar{p}_2) &= a_{12}\bar{q}_1 + a_{22}\bar{q}_2 + \cdots + a_{n2}\bar{q}_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A(\bar{p}_m) &= a_{1m}\bar{q}_1 + a_{2m}\bar{q}_2 + \cdots + a_{nm}\bar{q}_n \end{aligned}$$

Sustituyendo en [3], resulta:

$$\bar{y} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m)\bar{q}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m)\bar{q}_2 + \cdots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m)\bar{q}_n$$

Comparando con [2], se sigue que

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \end{aligned} \qquad [4]$$

Cada posible aplicación lineal $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ queda determinada por el cuadro de coeficientes de las n ecuaciones establecidas, y se llama *matriz* de dimensión u orden $n \times m$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \cdots a_{1m} \\ a_{21}a_{22} \cdots a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2} \cdots a_{nm} \end{pmatrix}$$

Las igualdades [4], que definen una aplicación lineal en forma matricial, se escriben:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

El elemento de una matriz que ocupa la fila i y la columna j se simboliza a_{ij}, y a la matriz se la puede representar, de modo genérico, por $A = (a_{ij})$.

Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y son iguales los términos correspondientes; o sea: Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se tiene:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

Estas condiciones de igualdad son consecuencia de la definición de aplicaciones iguales.

En el apartado que sigue se van a definir operaciones en el conjunto de las matrices, y también un producto externo por escalares del cuerpo R.

La manera de definir estas operaciones cobra sentido entendiendo que entre el conjunto de las aplicaciones lineales y sus correspondientes matrices u *operadores* existe un isomorfismo. Entonces, es conveniente recordar previamente las operaciones entre aplicaciones lineales, y luego dejar registrado el isomorfismo apuntado.

Adición de aplicaciones lineales

Denotemos por $\mathfrak{L}(V, V')$ el conjunto de aplicaciones lineales del espacio vectorial V en V'.

Si $f, g \in \mathfrak{L}(V, V')$, se define la operación interna $f + g : V \to V'$, tal que

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in V$$

Demostremos que $f + g$ es aplicación lineal. En efecto:

$$\begin{aligned}
&1.^{o}\quad (f+g)(x+y) = f(x+y) + g(x+y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = \\
&\qquad\qquad = (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)) = (f+g)(x) + (f+g)(y) \\
&2.^{o}\quad (f+g)(\alpha x) \quad = f(\alpha x) + g(\alpha x) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \\
&\qquad\qquad = \alpha(f+g)(x)
\end{aligned}$$

Ejercicio

Justifíquese que el conjunto de las aplicaciones lineales $\mathfrak{L}(V, V')$ con la operación de adición, recién definida, es un grupo abeliano.

Producto externo por escalares del cuerpo R

Si $\lambda \in R$ y $f \in \mathfrak{L}(V, V')$, se define $\lambda f: V \to V'$, tal que $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$.

Obsérvese que, siendo $\lambda \in E$, $f \in \mathfrak{L}(V, V')$, $\lambda f \in \mathfrak{L}(V, V')$. En efecto:

$$\begin{aligned}
&1.^{o}\quad (\lambda f)(x+y) = \lambda(f(x+y)) = \lambda(f(x) + f(x)) = \lambda f(x) + \lambda f(y) = (\lambda f)(x) + (\lambda f)(y) \\
&2.^{o}\quad (\lambda f)(\alpha x) = \lambda(f(\alpha x)) = \lambda(\alpha f(x)) = \alpha \cdot \lambda \cdot f(x) = \alpha(\lambda f)(x)
\end{aligned}$$

Respecto de este producto externo, es fácil realizar el siguiente ejercicio:

Ejercicio

Demuéstrese que la multiplicación por escalares del cuerpo de los números reales, de las aplicaciones lineales, goza de las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
&1.^{o}\quad \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g \\
&2.^{o}\quad (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f \\
&3.^{o}\quad \alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f \\
&4.^{o}\quad 1 \cdot f = f
\end{aligned}$$

Consecuencia de todo lo anterior es que el conjunto de las aplicaciones lineales de V en V' es un *espacio vectorial* sobre R, para las operaciones establecidas.

Tal como ha quedado definido el concepto de matriz, existe una biyección entre el conjunto de las aplicaciones lineales, $\mathfrak{L}(V_m, V_n)$ y el de sus correspondientes matrices u operadores, $\mathfrak{M}_{n\times m}$:

$$\begin{array}{ccc}
(V_m, V_n) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n\times m} \\
f & \longrightarrow & A(f)
\end{array}$$

Pero, además, definidos, como en el próximo apartado se hace, la adición de matrices y su producto externo por números reales, esa biyección cumple las propiedades:

1. $A(f + g) = A(f) + A(g)$
2. $A(\lambda f) = \lambda \cdot A(f)$.

Tal biyección con las propiedades 1 y 2 es homomórfica. En fin, se trata de un *isomorfismo*.

Analicemos la propiedad 1.

Si se fija la base $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots \bar{u}_m\}$ de V_m y la base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_n\}$ de V_n, y se supone que $f(\bar{u}_i) = a_{1i}\,\bar{v}_1 + a_{2i}\,\bar{v}_2 + \cdots + a_{ni}\,\bar{v}_n$, resulta que la matriz de f tendrá como columna i-ésima

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

Análogamente, si $g(\bar{u}_i) = b_{1i}\,\bar{v}_1 + b_{2i}\,\bar{v}_2 + \cdots + b_{ni}\,\bar{v}_n$, la matriz de g tendrá de columna i-ésima

$$\begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \cdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

Como $(f + g)(\bar{u}_i) = f(\bar{u}_i) + g(\bar{u}_i) = (a_{1i} + b_{1i})\,\bar{v}_1 + \cdots + (a_{ni} + b_{ni})\,\bar{v}_n$, resultará que su columna i-ésima es:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} + b_{1i} \\ a_{2i} + b_{2i} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{ni} + b_{ni} \end{pmatrix};$$

o sea, la suma de las columnas i-ésimas de las matrices de f y g.

Tal expresión no es más que la definición, que se da en el próximo apartado, de suma de matrices; por tanto,

$$A(f + g) = A(f) + A(g), \qquad \text{c.q.d.}$$

1.2. OPERACIONES CON MATRICES DEL MISMO ORDEN

Sea $M_{n\times m} = \{\text{conjunto de matrices de orden } n \times m\}$.

Se definen dos operaciones sobre $M_{n\times m}$.

1.2.1. Adición en $M_{n\times m}$.

Si $$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nm} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}b_{12} \ldots b_{1m} \\ b_{21}b_{22} \ldots b_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}b_{n2} \ldots b_{nm} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \ldots a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \ldots a_{2m} + b_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} \ldots a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

En notación abreviada: $A = (a_{ij}) \wedge B = (b_{ij}) \Rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.
Según esta definición, resultan inmediatas las propiedades siguientes:

I. *Conmutativa*: $A + B = B + A$,
pues $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A$,
por la propiedad conmutativa de los números reales.

II. *Asociativa*: $A + (B + C) = (A + B) + C$,
pues $A + (B + C) = (a_{ij} + [b_{ij} + c_{ij}]) = ([a_{ij} + b_{ij}]) + c_{ij}) = (A + B) + C$,
por la propiedad asociativa de los números reales.

III. *Existe elemento cero*:

$$0 = \overbrace{\begin{pmatrix} 0\,0\ldots 0 \\ 0\,0\ldots 0 \\ \cdots\cdots \\ 0\,0\ldots 0 \end{pmatrix}}^{m} \Bigg\} n = (0)$$

Se verifica $A + 0 = A$, para todo A.

IV. *Existe elemento opuesto*: Si $A = (a_{ij})$ será $-A = (-a_{ij})$,
pues se verifica $A + (-A) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0) = 0$.

A la vista de las cuatro propiedades registradas, se establece que el conjunto $M_{n \times m}$, dotado de la adición, tiene estructura de grupo abeliano.

1.2.2. Multiplicación de un número real por una matriz

Se define $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} \ldots \lambda a_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda a_{n1} \ldots \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$; o sea

si $A = (a_{ij}) \Rightarrow \lambda A = (\lambda a_{ij})$.
Esta operación externa tiene las siguientes propiedades:

I'. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
pues $(\lambda + \mu)(a_{ij}) = ((\lambda + \mu)a_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) + (\mu a_{ij}) =$
$= \lambda(a_{ij}) + \mu(a_{ij})$.

II'. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
pues $\lambda(a_{ij} + b_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}) = (\lambda a_{ij}) + (\lambda b_{ij}) = \lambda(a_{ij}) + \lambda(b_{ij})$.

III'. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
pues $\lambda(\mu a_{ij}) = (\lambda\mu a_{ij}) = (\lambda\mu)(a_{ij})$.

IV'. $1 \cdot A = A$,
evidente, pues $1 \cdot (a_{ij}) = (1 \cdot a_{ij}) = (a_{ij})$.

1.2.3. Espacio vectorial $M_{n\times m}$ y base canónica

De las propiedades anteriores y de la condición de grupo abeliano se sigue que $M_{n\times m}$ es un espacio vectorial real.

$$\text{Sean } U_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};\quad U_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};\quad U_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que las matrices $\{U_{11}\ U_{12} \dots U_{nm}\}$ forman una base de $M_{n\times m}$. En efecto:

i) Estos elementos de $M_{n\times m}$ son *linealmente independientes*, pues

$$\lambda_{11}U_{11} + \lambda_{12}U_{12} + \dots + \lambda_{nm}U_{nm} =$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_{11}\lambda_{12} \dots \lambda_{1m} \\ \lambda_{21}\lambda_{22} \dots \lambda_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n}\ \lambda_{n2} \dots \lambda_{nm} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{11} = \dots = \lambda_{nm} = 0$$

ii) Cualquier elemento $A \in M_{n\times m}$ *depende linealmente* de $\{U_{11}U_{12} \dots U_{nm}\}$,

pues, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nm} \end{pmatrix}$, resultará $A = a_{11}U_{11} + \dots + a_{nm}U_{nm}$

$M_{n\times m}$ es un espacio vectorial de dimensión $n \times m$, ya que la base $\{U_{11}U_{12} \dots U_{nm}\}$ tiene $n \times m$ elementos.

1.2.4. Multiplicación de matrices. Propiedades

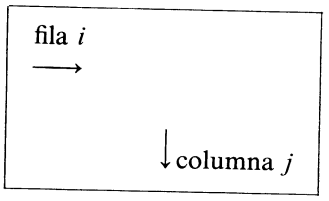
Se define una aplicación de $M_{n\times m} \times M_{m\times p}$ en $M_{n\times p}$ que se llama *multiplicación*.

$$\underset{M_{n\times m}}{\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nm} \end{pmatrix}} \times \underset{M_{m\times p}}{\begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1p} \\ \dots\dots\dots \\ b_{m1} \dots b_{mp} \end{pmatrix}} = \underset{M_{n\times p}}{\begin{pmatrix} c_{11} \dots c_{1p} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n1} \dots c_{np} \end{pmatrix}}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

Para calcular el término c_{ij} del producto se multiplica término a término la

fila i del primer factor por la columna j del segundo, y se suma, según lo que indica el esquema.



Para que sea posible el producto de dos matrices $A \times B$, ha de ser igual el número de columnas de A al número de filas de B.

Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ de orden } n \times m \\ B \text{ de orden } m \times p \end{array}\right\} \quad A \times B \text{ de orden } n \times p$$

Ejemplos

1) $M_{2\times 3} \times M_{3\times 1} \longrightarrow M_{2\times 1}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 2 \\ 2 \times 1 + 1 \times 0 + 5 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

2) $M_{2\times 2} \cdot M_{2\times 3} \longrightarrow M_{2\times 3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 4 & 14 & -8 \end{pmatrix}$$

3) $M_{21} \times M_{1\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

4) $M_{1\times 3} \times M_{3\times 1} \longrightarrow M_{1\times 1}$

$$(2 \;\; 5 \;\; -7)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (11)$$

Suponiendo que la multiplicación sea posible, resultan las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

$$A = (a_{ij}) \text{ de orden } n \times m$$
$$B = (b_{ij}) \text{ de orden } m \times p$$
$$C = (c_{ij}) \text{ de orden } p \times q$$

$$A \times B = (\alpha_{ij}) \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, p$$

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

$$(A \times B) \times C = (\gamma'_{ij}) \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, q$$

$$\gamma'_{ij} = \sum_{h=1}^{p} \alpha_{ih} c_{hj} = \sum_{h=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kh} \right) c_{hj}$$

$$\begin{aligned} \gamma'_{ij} = {} & (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{im}b_{m1})\, c_{1j} + && h = 1 \\ & + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \ldots + a_{im}b_{m2})\, c_{2j} + && h = 2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \ldots + a_{im}b_{mp})\, c_{pj} && h = p \end{aligned}$$

$$B \times C = (\beta_{ij}) \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, q$$

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} c_{kj} \left(\beta_{kj} = \sum_{h=1}^{p} b_{kh} c_{hj} \right)$$

$$A \times (B \times C) = (\gamma_{ij}) \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, q$$

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \beta_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \left(\sum_{h=1}^{p} b_{kh} c_{hj} \right)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} = {} & a_{i1}(b_{11}c_{ij} + b_{12}c_{2j} + \ldots + b_{1p}c_{pj}) + && k = 1 \\ & + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + \ldots + b_{2p}c_{pj}) + && k = 2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{im}(b_{m1}c_{1j} + b_{m2}c_{2j} + \ldots + b_{mp}c_{pj}) && k = m \end{aligned}$$

Como se ve, γ_{ij} se compone de los mismos sumandos que γ'_{ij} agrupados de modo distinto, luego $\gamma_{ij} = \gamma'_{ij}$.

O sea

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C), \quad \text{c.q.d.}$$

2. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \cdots a_{1m} \\ a_{21}a_{22} \cdots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2} \cdots a_{nm} \end{pmatrix}$, consideramos la matriz cuadrada de orden m cuya diagonal principal está formada por 1 y los demás elementos 0:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad A \times I = A$$

Existe otro I' análogo al anterior, de orden n, tal que $I' \times A = A$.

3. Propiedad distributiva respecto de la adición.

$$A(B + C) = A \times B + A \times C$$

En efecto:

$$A(B + C) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj} \right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \right) + \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj} \right) = A \times B + A \times C.$$

1.2.5. Anillo de las matrices cuadradas $M_{n \times n}$

Entre matrices cuadradas del mismo orden, siempre es posible la multiplicación y el resultado es otra matriz cuadrada del mismo orden.

Teniendo en cuenta que $M_{n \times n}$ es grupo abeliano para la adición y las propiedades 1, 2 y 3 de la multiplicación, resulta que $M_{n \times n}$ es un *anillo con elemento unidad.*

1.3. INVERSIONES DE UNA PERMUTACION

Consideremos n elementos que pueden ser los n primeros números naturales. Con estos n elementos se pueden formar $n!$ permutaciones.

La permutación en la que se encuentran los elementos en el orden natural se llamará *permutación principal* y será (1, 2, 3, . . . , n).

Dada una permutación cualquiera, por ejemplo (3, 2, 1, . . . , n), si nos fijamos en los elementos 3 y 1, resulta que están en orden distinto al orden en que aparecen en la permutación principal; es decir, en la permutación principal están, primero el 1 y luego el 3, y aquí, al contrario. Se dice entonces que forman *inversión.* Si estuviesen en igual orden que en la permutación principal se diría que forman *sucesión.*

Una permutación es de *clase par* cuando es par el número de sus inversiones. Una permutación es de *clase impar* si es impar el número de sus inversiones.

Para calcular el número de inversiones de una permutación, basta comparar cada elemento de la permutación con todos los que le siguen.

Ejemplos

Dada (1 2 3 4 5 6) como permutación principal, calculemos el número de inversiones de las permutaciones siguientes:

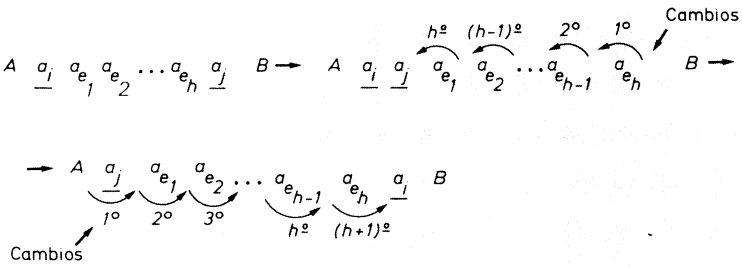
1) $(2\ 5\ 4\ 3\ 1\ 6) \Rightarrow$ Inversiones $\left\{\begin{matrix} 21 \\ 54\ \ 53\ \ 51 \\ 43\ \ 41 \\ 31 \end{matrix}\right\}$ 7 en total

2) $(6\ 5\ 4\ 1\ 2\ 3) \Rightarrow$ Inversiones $\left\{\begin{matrix} 65\ \ 64\ \ 61\ \ 62\ \ 63 \\ 54\ \ 51\ \ 52\ \ 53 \\ 41\ \ 42\ \ 43 \end{matrix}\right\}$ 12 en total

Proposición. Si se cambian entre sí dos elementos, la permutación cambia de clase.

Demostración. Si son consecutivos y formaban sucesión, al cambiarlos entre sí formarán inversión, y viceversa; luego la permutación pierde o gana una inversión. Respecto de los demás elementos, no cambian las inversiones; luego en definitiva cambia de clase.

En el caso de que entre los elementos que se intercambian existan h elementos, el intercambio equivale a efectuar $2h + 1$ cambios de elementos consecutivos cada uno de los cuales hace cambiar la clase de la permutación, luego al final queda una permutación de clase contraria, ya que $2h + 1$ es impar.



Proposición. De las n *permutaciones, la mitad son de clase par y la otra mitad son de clase impar.*

Demostración. Fijémonos en dos determinados elementos en todas las $n!$ permutaciones. Si cambiamos estos elementos entre sí, cada permutación par se transforma en una impar, según la proposición anterior, y viceversa. Al efectuar este intercambio, volvemos a obtener las $n!$ permutaciones dadas, pues hay $n!$ y todas son distintas, ya que si hubiese dos iguales lo serían las dos permutaciones de donde proceden, contra la hipótesis.

Como a cada permutación par se le hace corresponder una impar y viceversa, sucede que hay tantas permutaciones pares como impares, c.q.d.

1.4. DETERMINANTE. DEFINICION

Considérese una matriz cuadrada de orden n. Se puede formar un producto

de n elementos, entre los n^2 de la matriz, eligiendo los elementos de forma que no haya dos de la misma fila ni dos de la misma columna. Necesariamente tendrá que haber uno de cada fila y uno de cada columna.

Sean los n factores $a_{i_1 j_1}\ a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$. Los subíndices que indican las filas forman una permutación $(i_1 i_2 \ldots i_n)$ de los números $(1, 2, \ldots, n)$; asimismo los que indican las columnas $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ forman otra permutación.

Si ambas permutaciones $(i_1 i_2 \ldots i_n)$, $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ son de la misma clase (par o impar), asignamos al producto $a_{i_1 j_1}\ a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$ el signo $+$; si son de distinta clase, el signo $-$.

Se pueden escribir los factores ordenados por filas $a_{1 j_1}\ a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}$. En este caso $(1\ 2 \ldots n)$ es permutación par. Luego si $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ es permutación par le corresponde el signo $+$, y si es impar el signo $-$.

NOTA. Es de observar que el signo de un producto $a_{i_1 j_1}\ a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$ no depende del orden de los factores, pues cada vez que se cambia dos factores entre sí la permutación $(i_1 i_2 \ldots i_n)$ cambia de clase, pero también la $(j_1 j_2 \ldots j_n)$; luego si eran de la misma clase siguen siéndolo al alterar el orden de los factores. Por esto es posible escribir el producto en la forma $a_{1 j_1}\ a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}$.

Definición. Se llama *determinante* de una matriz cuadrada de orden n al número obtenido al sumar todos los productos posibles de n términos, tales que no haya dos de la misma fila ni dos de la misma columna con el signo $+$ o $-$ según que sean de la misma o distinta clase las permutaciones de los índices que indican filas y columnas.

El determinante se representa

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Al término $a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ de la suma que define el determinante se le llama *diagonal principal* por el lugar que ocupan los factores.

La otra diagonal se llama *diagonal secundaria.*

Si representamos por $\mathfrak{S} = \{\text{permutaciones de } (1, 2, \ldots, n)\}$ se puede escribir

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \ldots j_n) \in \mathfrak{S}} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \ldots a_{n j n} (-1)^{\gamma},$$

donde $\gamma = 1$ si $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ es impar y $\gamma = 2$ si $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ es par.

Un determinante de orden n da en su desarrollo $n!$ sumandos, la mitad con signo $+$ y la mitad con signo $-$ (por la segunda proposición del apartado anterior).

1.5. DETERMINANTES DE SEGUNDO Y TERCER ORDEN. REGLA DE SARRUS

1) Determinante de una matriz cuadrada de segundo orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Regla de Sarrus. El valor del determinante es igual a la diagonal principal menos la diagonal secundaria.

2) Determinante de una matriz cuadrada de tercer orden.

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}$$

Regla de Sarrus. El valor del determinante es igual a la diagonal principal más el producto de los términos de cada paralela con el vértice opuesto, menos la diagonal secundaria menos el producto de los términos de cada paralela con el vértice opuesto.

1.6. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

I. *Si se cambian filas por columnas en una matriz cuadrada, su determinante no varía.*

En efecto, todo sumando del primer determinante está formado por el producto de n términos, uno de cada fila y uno de cada columna, luego pertenece también al segundo. Las dos permutaciones que corresponden a filas y columnas en el segundo son las mismas que corresponden a columnas y filas en el primero; luego el signo de dicho sumando será + o − en ambos determinantes, según sean de la misma o distinta clase. Por lo tanto, las sumas, o lo que es lo mismo, el valor del determinante, son iguales por tener los mismos sumandos con los mismos signos.

II. *Si cambiamos entre sí dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo.*

Razonemos con columnas. (Análogo para filas.)

Considérese un sumando $a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ del primer determinante; al cambiar dos columnas entre sí, por ejemplo. la primera y segunda, el sumando anterior pertenece al nuevo determinante con la diferencia de que a_{1j_1} se ha convertido en el elemento $(1j_2)$, que llamaremos a'_{1j_2}, y el a_{2j_2} en el elemento $(2j_1)$, que llamaremos a'_{2j_1}, o sea $a'_{1j_2}a'_{2j_1}a_{3j_3} \cdots a_{njn}$, siendo $a'_{1j_2} = a_{1j_1}$ y $a'_{2j_1} = a_{1j_2}$.

El signo ha cambiado puesto que la permutación que indica columnas es $(j_2j_1j_3 \cdots j_n)$ en vez de $(j_1j_2j_3 \cdots j_n)$, o sea, de distinta clase. Si cada sumando cambia de signo, el valor del determinante también lo hace, c.q.d.

III. *Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es nulo.*

Para fijar ideas, supongamos un determinante de tercer orden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Al cambiar entre sí la segunda y tercera filas, cambiará el signo por II, luego

$$-\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

de donde resulta $\Delta = -\Delta$, o sea, $\Delta = 0$, c.q.d.

IV. *Si se multiplican (o dividen) todos los términos de una fila o una columna de una matriz cuadrada por un número λ, el valor del determinante queda multiplicado (o dividido) por λ.*

Es consecuencia de que en cada sumando hay un elemento de cada fila, y se puede sacar factor común a λ o $1/\lambda$, respectivamente.

V. *Si una fila de un determinante está formada por términos que son suma de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes obtenidos sustituyendo los términos por los primeros y segundos sumandos respectivamente, o sea*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ b_{21}b_{22}b_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

Es consecuencia de que en el desarrollo del determinante cada sumando tiene un término de cada fila, por tanto tendrá un término de la fila segunda que se descompone en dos sumandos por la propiedad distributiva. Agrupando los primeros sumandos obtenemos el primer determinante, y agrupando los segundos, el segundo determinante. O sea,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33}(b_{22}+c_{22}) + a_{12}a_{31}(b_{23}+c_{23}) +$$

$$+ a_{13}a_{32}(b_{21}+c_{21}) - a_{13}a_{31}(b_{22}+c_{22}) - a_{11}a_{32}(b_{23}+c_{23}) - a_{12}a_{33}(b_{21}+c_{21})$$

= [conjunto de términos en que intervienen como factor los b] +

+ [ídem en que intervienen los c] =

$$= \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ b_{21}b_{22}b_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{c.q.d.}$$

VI. *Si en una matriz cuadrada una fila es suma de varias multiplicadas por factores cualesquiera, su determinante es nulo.* (*Análogo, para columnas.*) Es consecuencia de III, IV y V.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda a + \mu\alpha & \lambda b + \mu\beta & \lambda c + \mu\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \mu\alpha & \mu\beta & \mu\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

VII. *Si a una fila de una matriz cuadrada se le suman otras filas multiplicadas por factores cualesquiera, la nueva matriz tiene el mismo determinante.* (*Análogo, enunciado para columnas.*)

Es consecuencia de III, IV y V.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda a_2 + \mu a_1 & b_3 + \lambda b_2 + \mu b_1 & c_3 + \lambda c_2 + \mu c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_1 b_1 c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}$$

1.7. ADJUNTO Y MENOR COMPLEMENTARIO DE UN ELEMENTO

Fijémonos en un elemento a_{lk} de una matriz cuadrada. En el desarrollo del determinante existirán unos sumandos que contienen al elemento a_{lk}. Si se extrae factor común a a_{lk} de los sumandos que le contienen, llamaremos *adjunto* de a_{lk} a la suma a la cual multiplica a_{lk}.

El adjunto de a_{lk} se representa A_{lk}.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Consideremos los términos en que figura $\underline{a_{12}}$ y saquémosle factor común.

$$a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} = a_{12}\underbrace{(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})}_{\| \\ A_{12}}$$

Según esta definición, resulta que un determinante es igual a la suma de los productos de los términos de una fila por sus adjuntos correspondientes.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

Análogamente, un determinante es igual a la suma de los términos de una columna por sus adjuntos correspondientes.

Ahora se puede demostrar más fácilmente la propiedad V del apartado anterior.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & b_{23} + c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (b_{21} + c_{21})A_{21} + (b_{22} + c_{22})A_{22} +$$

$$+ (b_{23} + c_{23})A_{23} = (b_{21}A_{21} + b_{22}A_{22} + b_{23}A_{23}) + (c_{21}A_{21} + c_{22}A_{22} + c_{23}A_{23}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ b_{21}b_{22}b_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

Proposición. La suma de los productos de los adjuntos de una fila por los elementos de otra fila es igual a cero. (Análogo, enunciado para columnas.)

Razonemos sobre el determinante de orden 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

luego también será

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ \alpha \quad \beta \quad \gamma \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = \alpha A_{21} + \beta A_{22} + \gamma A_{23}$$

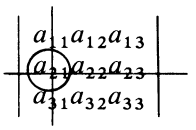
pero si en vez de α, β, γ que son números cualesquiera tomamos los elementos $a_{31}a_{32}a_{33}$ resultará

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \\ \underbrace{a_{31}a_{32}a_{33}} \end{vmatrix} = a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0$$

0 por tener dos filas iguales

Si en un determinante suprimimos la fila l y la columna k, el determinante de orden inferior en una unidad que resulta se denomina *menor complementario* del elemento a_{lk} y se representa α_{lk}.

Ejemplo



$$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

Se demuestra que el adjunto A_{lk} es igual al menor complementario α_{lk} con signo + o − según que $l + k$ sea par o impar (prescindimos de la demostración para no alargar la exposición) o sea $\underline{A_{lk} = (-1)^{l+k}\,\alpha_{lk}}$.

1.8. MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Se va a efectuar el razonamiento con una matriz de orden 3, pero teniendo en cuenta que es válido cualquiera que sea el orden.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}$. Se dice que la matriz A es *regular* cuando su determinante es distinto de cero.

Se dice que una matriz es *singular* cuando su determinante es igual a cero. Supóngase que A es regular o sea $|A| \neq 0$.

Formemos la matriz B.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Los $A_{11}\,A_{12}\ldots$ son los adjuntos de $a_{11}\,a_{12}\ldots$ respectivamente. Si se multiplica $A \times B$ resultará

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{\frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}{|A|}}^{|A|} & \overbrace{\frac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}}{|A|}}^{0} \\ \overbrace{\frac{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}}{|A|}}^{0} & \overbrace{\frac{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{33}A_{33}}{|A|}}^{|A|} \\ \overbrace{\frac{a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13}}{|A|}}^{0} & \overbrace{\frac{a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23}}{|A|}}^{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\frac{a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}}{|A|}}^{0} \\ \overbrace{\frac{a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33}}{|A|}}^{0} \\ \overbrace{\frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{|A|}}^{|A|} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{matriz unidad} = I$$

(Basta aplicar las conclusiones del apartado anterior para comprobar los valores 0 ó $|A|$ que se indican.)

Queda establecido que $A \times B = I$. Y, análogamente, $B \times A = I$.

A la matriz B se la llama matriz inversa de A y se representa A^{-1}.

Se ha supuesto que A es regular y ha quedado demostrado que existe matriz inversa; es decir, que la regularidad es *condición suficiente*. Pero además es necesaria. En efecto: La fórmula de Binet-Cauchy establece que si A, B son matrices cuadradas del mismo orden se verifica

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

(La demostración de la anterior fórmula pertenece a la teoría de los determinantes y se sale de los límites fijados para esta materia en el presente libro.)

Supongamos que A tiene matriz inversa B, o sea $A \times B = I$. Por la fórmula de Binet-Cauchy

$$1 = |I| = |A \times B| = |A| \times |B|,$$

luego

$$|A| \neq 0, \quad \text{c.q.d.}$$

La matriz que admite inversa se dice *inversible*; por lo tanto:

$$\text{matriz regular} \Leftrightarrow \text{matriz inversible}$$

Ejercicio

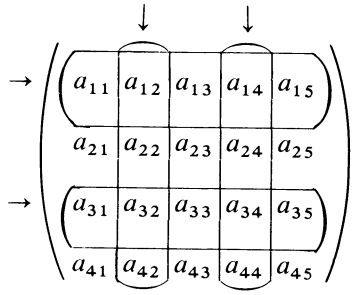
Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden inversibles, demostrar que $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB. Consecuencia: Las matrices inversibles de orden n forman grupo respecto al producto. ¿Forman cuerpo? ¿Por qué no? (No es cerrado respecto de la adición.)

1.9. MENORES DE UNA MATRIZ. MENOR ORLADO

Dada una matriz de orden $n \times m$, consideremos h filas y h columnas de la matriz. Los elementos comunes a estas h filas y h columnas forman una matriz cuadrada que se llamará *una menor* de la matriz dada, y su determinante, *un menor* de la matriz dada.

Ejemplos

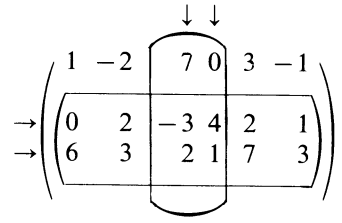
1)



Los elementos comunes a las dos filas y dos columnas señalados formarán la menor

$$\begin{pmatrix} a_{12}a_{14} \\ a_{32}a_{34} \end{pmatrix} \quad \text{y el menor} \quad \begin{vmatrix} a_{12}a_{14} \\ a_{32}a_{34} \end{vmatrix}$$

2)



Una menor $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; un menor $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

Dado un determinante menor de una matriz formado por h filas y h columnas se llama *menor orlado* al determinante de orden $h + 1$ formado por las anteriores

nias y una cualquiera de las restantes, y las anteriores columnas y una cualquiera de las restantes.

Ejemplo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1.^{a} & 2.^{a} & 3.^{a} & 4.^{a} & 5.^{a} & 6.^{a} & 7.^{a} \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -5 & 10 & -16 \\ -15 & 1 & 3 & 4 & 11 & -17 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & -9 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 6 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1.^{a} \\ 2.^{a} \\ 3.^{a} \\ 4.^{a} \end{array}$$

Sea el menor $\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 9 & -9 \end{vmatrix}$, formado por las

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{filas: } 2.^{a} \text{ y } 3.^{a} \\ \text{columnas: } 4.^{a} \text{ y } 5.^{a} \end{array} \right\}$$

Escribamos alguno de los *menores orlados* del menor anterior:

1.º) Con la fila primera y la columna séptima

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -16 \\ \boxed{\begin{matrix} 4 & 11 \\ 9 & -9 \end{matrix}} & & 2 \\ & & 3 \end{vmatrix}$$

2.º) Con la fila primera y la columna primera

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -15 & \boxed{\begin{matrix} 4 & 11 \\ 9 & -9 \end{matrix}} & \\ 6 & & \end{vmatrix}$$

3.º) Con la fila cuarta y la columna sexta

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & 11 \\ 9 & -9 \end{matrix}} & & -17 \\ & & 5 \\ 0 & 6 & -1/2 \end{vmatrix}$$

1.10. COMBINACIONES LINEALES DE FILAS Y COLUMNAS. RANGO DE UNA MATRIZ

Dada una matriz de orden $n \times m$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nm} \end{pmatrix},$$

sus filas pueden considerarse vectores de $\mathcal{R}^m$ y sus columnas vectores de $\mathcal{R}^n$.

Puesto que en $\mathcal{R}^m$ y $\mathcal{R}^n$ es posible sumar vectores y multiplicarlos por un número real, tienen sentido las definiciones siguientes:

Se dice que *una fila es combinación lineal* de otra, cuando resulta de sumarlas previamente multiplicadas por factores cualesquiera. Es decir, cuando es combinación lineal, al considerarlas como vectores de $\mathcal{R}^m$.

Ejemplos

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 12 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

La cuarta fila es combinación lineal de las tres primeras, pues

$$(12\ 9\ 1) = (2\ 5\ -1) + (4\ 3\ 2) + (6\ 1\ 0)$$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & 16 & 8 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

La segunda fila es combinación lineal de la primera y tercera, pues

$$(2\ 16\ 8) = 3(2\ 6\ 3) + (-1)(4\ 2\ 1)$$

Análogamente se dice que *una columna es combinación lineal* de otras cuando resulta de sumarlas previamente multiplicadas por números cualesquiera.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 19 \\ 0 & \sqrt{3} & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Puesto que $\begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

la tercera columna es combinación lineal de las dos primeras.

Se llama *rango o característica* de una matriz al orden del menor no nulo de mayor orden. Si el rango es r se llama *menor principal* a un menor no nulo de orden r.

1.11. PROPOSICIONES RELATIVAS A DEPENDENCIA LINEAL DE FILAS Y COLUMNAS

Proposición 1. *Si una fila de una matriz es combinación lineal de h filas, todos los determinantes menores que se pueden formar con dichas $h+1$ filas son nulos. Análogamente, para columnas.*

Esto es debido a que un determinante que tiene una fila combinación lineal de otras es nulo (propiedad VI).

> *Proposición* 2. *Sea* $|A| \neq 0$ *un determinante de orden h de una matriz. Si todos los menores obtenidos orlando* $|A|$ *con la fila l y cada una de las columnas de la matriz son nulos, se puede asegurar que la fila l es una combinación lineal de aquéllas. Análogamente, para columnas.*

Supongamos que A está formado por las h primeras filas y las h primeras columnas. (Se hace esta suposición para fijar ideas, habida cuenta de que no quita generalidad al razonamiento.)

Sea el menor orlado

$$\begin{array}{r} \Delta = \\ \text{fila } l \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1h} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & \dots & a_{hh} \end{array}} & \begin{array}{c} a_{1j} \\ \dots \\ a_{hj} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} a_{l1} & \dots & a_{lh} \end{array} & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{columna } j}}{a_{lj}} \end{array} \right|$$

Si $j = 1, 2, \dots, h \Rightarrow \Delta = 0$, por tener dos columnas iguales.
Si $j = h + 1, \dots, m \Rightarrow \Delta = 0$, por hipótesis.
Luego para *todo valor de j* es $\Delta = 0$.
Desarrollando el determinante por los elementos de la última columna resulta:

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{hj}A_{hj} + a_{lj}|A| = 0$$

luego

$$\boxed{a_{lj} = -\frac{A_{1j}}{|A|}a_{1j} - \frac{A_{2j}}{|A|}a_{2j} - \cdots - \frac{A_{hj}}{|A|}a_{hj}}$$

Como para todo j es válida esta relación, queda demostrado que la l^a fila es combinación lineal de las restantes.

> *Proposición* 3. *Si r es el rango y A un menor principal, todas las filas (columnas) de la matriz son combinaciones lineales de las r filas (columnas) que figuran en A.*

Esta proposición es una consecuencia inmediata de la proposición 2.

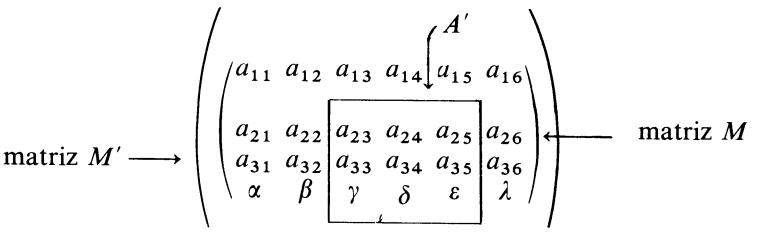
1.12. TEOREMA DEL RANGO

> *El rango de una matriz es igual al rango de la matriz obtenida añadiendo a la matriz dada una fila que sea combinación lineal de las restantes filas. Análogo, enunciado para columnas.*

Demostración. Sea M una matriz de rango r, y M' la matriz obtenida aña-

diendo a la matriz dada una fila que sea combinación lineal de otras filas. Los menores de orden $r + 1$ de M' que sean también de M son nulos puesto que por hipótesis M es de rango r.

Los únicos menores de orden $r + 1$ de M' que no figuran en M son aquellos en los que interviene la fila nueva. Vamos a comprobar que estos menores son nulos también. En efecto: sea A' uno de estos menores



La última fila de M' (letras griegas) es combinación lineal de filas de M. Pueden ocurrir dos casos:

1. Los menores de orden r formados con las r filas de M que intervienen en A' son todos nulos. En este caso, si se desarrolla A' por los elementos de la última fila, $A' = \gamma A_\gamma + \delta A_\delta + \varepsilon A_\varepsilon$; pero los adjuntos A_γ, A_δ, A_ε son menores de orden r (prescindiendo del signo) de las r filas citadas, luego $A' = 0$.
2. Existe un menor principal de M entre los que se pueden formar con las r filas de M que intervienen en A'. En este caso resulta que:

a) La fila nueva es, por hipótesis, combinación lineal de filas de M.
b) Todas las filas de M son combinación lineal de las filas de un menor principal (véase proposición 3), es decir de las r filas de M que intervienen en A'.
c) Por la transitividad de la dependencia lineal resulta que la nueva fila es una combinación lineal de las r filas de M que intervienen en A'.

Consecuencia de *c*) es que $A' = 0$ (por la propiedad VI de los determinantes).

Si todos los menores de orden $r + 1$ de M' son nulos, lo serán los de orden $r + 2$, $r + 3$, etc., pues cada menor se puede desarrollar por una fila y es igual a una suma de menores de orden inferior en una unidad. Resulta $r(M') = r(M)$, c.q.d.

En los ejercicios prácticos se verá que la aplicación de este teorema y las proposiciones anteriores permiten calcular el rango de la matriz.

1.13. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. Efectúese la suma

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

2. Efectúense los productos

a) $(1, 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} =$

c) $(1\ 0\ 5) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} =$

3. Calcúlese:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

4. Hállese la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Determínese el rango de las matrices siguientes y escríbase algún menor principal de cada una de ellas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & -1 & -4 \\ 11 & 12 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 8 & 7 \\ 6 & -3 & 12 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & -10 & 9 \end{pmatrix}$$

6. Resuélvase la ecuación

$$\begin{vmatrix} 2x + 1 & x & 2x + 1 \\ 3x - 1 & 2x + 1 & 4x \\ 4x & 3x - 1 & 6x - 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Sean los determinantes

$$A_0 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & x \\ -1 & -9 & x^2 \end{vmatrix}; \quad A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & x^2 \\ 27 & 1 & x^3 \end{vmatrix}; \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -27 & -x^3 \\ -1 & 3 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) Determínense las raíces de la ecuación $A_0 = 0$
b) Justifíquese que A_1 y A_2 son múltiplos de A_0.
c) Resuélvanse las ecuaciones $A_1 = 0$ y $A_2 = 0$.

8. Sin realizar su desarrollo, justifíquese que es nulo el determinante

$$\begin{vmatrix} b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \\ a+b & c & 1 \end{vmatrix}$$

9. Justifíquese, sin desarrollar, la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

10. Demuéstrese que la igualdad que se facilita es correcta, sin necesidad de desarrollar los determinantes.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & p+q+r & r+p \\ x+y & y+z & x+z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

2

Sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché

2.1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. DEFINICIONES

Se llama *sistema de ecuaciones lineales* a un conjunto de expresiones de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}\right\} \qquad [1]$$

en donde a_{ij}, $c_i \in \mathfrak{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Las letras $x_1\ x_2 \ldots x_n$ se llaman *incógnitas* y representan números reales desconocidos que pueden existir o no existir, como veremos.

Se llama *solución* del sistema [1] a todo conjunto $(p_1\ p_2 \ldots p_n)$ de n números reales, que puede interpretarse como un vector del espacio n-dimensional $\mathfrak{R}^n$, tal que se verifiquen las igualdades siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n = c_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \cdots + a_{mn}p_n = c_m \end{array}\right\} \qquad [2]$$

Resolver un sistema es averiguar si tiene soluciones y, en caso afirmativo, hallarlas todas.

Los sistemas que poseen solución se llaman *compatibles* y los que no la poseen *incompatibles*.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones.

Si

$$\begin{aligned} L_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - c_1 = 0 \\ L_2 &= a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - c_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - c_m = 0 \end{aligned}$$

se verifica

1) $\left.\begin{matrix} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ L_m = 0 \end{matrix}\right\}$ sistema equivalente a $\left\{\begin{matrix} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ L_m = 0 \\ \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \ldots + \alpha_m L_m = 0 \end{matrix}\right.$

2) $\left.\begin{matrix} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ L_m = 0 \end{matrix}\right\}$ sistema equivalente a $\left\{\begin{matrix} \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \ldots + \alpha_m L_m = 0 \\ L_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ L_m = 0 \end{matrix}\right.$

Estas dos propiedades son de demostración sencilla, casi evidentes; no obstante, se aconseja, como ejercicio, razonarlas con todo detalle.

2.2. SISTEMAS DE *n* ECUACIONES CON *n* INCOGNITAS

Razonemos, en primer lugar, sobre dos ecuaciones con dos incógnitas.

Sea el sistema

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{matrix}\right.$$

Para usar notación matricial llamaremos

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} .$$

El sistema puede escribirse $Ax = c$.

Supóngase que A es una matriz regular o sea $|A| \neq 0$. En este caso existirá la matriz inversa A^{-1}, luego

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}c; \quad \text{o sea} \quad x = A^{-1}c$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} \end{pmatrix} , \quad \text{luego} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{c_1A_{11} + c_2A_{21}}{|A|} \\ \dfrac{c_1A_{12} + c_2A_{22}}{|A|} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{c_1A_{11} + c_2A_{21}}{|A|} \\ x_2 = \dfrac{c_1A_{12} + c_2A_{22}}{|A|} \end{cases}$$

Como $|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}$, sucede que $c_1A_{11} + c_2A_{21}$ es igual al determinante que resulta al sustituir a_{11} y a_{21} por c_1 y c_2, respectivamente, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}, \quad \text{luego} \quad \begin{vmatrix} c_1a_{12} \\ c_2a_{22} \end{vmatrix} = c_1A_{11} + c_2A_{21}$$

Análogo razonamiento para la segunda incógnita:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22}, \quad \text{luego} \quad \begin{vmatrix} a_{11}c_1 \\ a_{21}c_2 \end{vmatrix} = c_1A_{12} + c_2A_{22}$$

Resulta así la siguiente

Regla de Cramer

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{matrix}\right\} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

El sistema tiene solución única

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}c_1 \\ a_{21}c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}}$$

La *regla de Cramer* se aplica al caso de tres ecuaciones con tres incógnitas y en general a n ecuaciones con n incógnitas. La demostración es enteramente análoga.

En todos los casos se requiere que la matriz de los coeficientes de las incógnitas sea regular.

Para el caso de tres ecuaciones con tres incógnitas resultaría

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

La solución única es

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12}a_{13} \\ c_2 & a_{22}a_{23} \\ c_3 & a_{32}a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}c_1 & a_{13} \\ a_{21}c_2 & a_{23} \\ a_{31}a_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}c_1 \\ a_{21}a_{22}c_2 \\ a_{31}a_{32}c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}}$$

Escríbase como ejercicio el caso de n ecuaciones con n incógnitas.

2.3. RESOLUCION EN EL CASO GENERAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES. TEOREMA DE ROUCHE-FROBENIUS

Sea el sistema considerado al principio

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Formemos la matriz de los coeficientes y la matriz de éstos, ampliada con los términos constantes

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} = (M_1) \qquad \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n}c_1 \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n}c_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn}c_m \end{pmatrix} = (M_2)$$

Si el sistema tiene solución, ambas matrices tienen el mismo rango. En efecto, si existe solución, la columna $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$ de (M_2) es una combinación lineal de las restantes columnas, luego las matrices (M_1) y (M_2) tienen el mismo rango (ver teorema del rango).

Recíprocamente, si el rango es el mismo el sistema tiene solución. Supongamos $r(M_1) = r(M_2) = r$. Sea A un menor principal de M_2. Podemos suponer que A está formado por las r primeras filas y las r primeras columnas, lo cual no quita generalidad, pues basta alterar el orden de las ecuaciones e incógnitas.

Llamaremos *incógnitas principales* a las r primeras (en general serán las incógnitas y ecuaciones correspondientes a A).

Puesto que cada una de las m-r restantes filas de la matriz M_2 son *combinación lineal de las r primeras* (proposición 3, número 5.212) pueden suprimirse por la equivalencia de sistemas 1) del apartado 5.31.

Luego el sistema es equivalente a

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = c_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = c_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n, \end{matrix}$$

llamado *subsistema principal,* tal que

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2r} \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Para cada conjunto arbitrario de valores que demos a las incógnitas no principales obtenemos una solución única para las incógnitas principales por aplicación de la regla de Cramer.

Podemos enunciar el siguiente importante

TEOREMA *de Rouché-Frobenius*

1. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución es que la matriz de los coeficientes de las incógnitas y la matriz ampliada con los términos constantes tengan igual rango.
2. Si se verifica la igualdad de rangos y

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1r} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}a_{r2}\ \ldots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

es un menor principal la solución del sistema es

Primera columna

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n & a_{12}\ldots a_{1r} \\ c_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n & a_{22}\ldots a_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ c_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n & a_{r2}\ \ldots a_{rr} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1r} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}a_{r2}\ \ldots a_{rr} \end{vmatrix}}$$

Segunda columna

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n & \ldots a_{1r} \\ a_{21} & c_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n & \ldots a_{2r} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{r1} & c_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n & \ldots a_{rr} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1r} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}a_{r2}\ \ldots a_{rr} \end{vmatrix}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_r = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots & c_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}a_{22}\ldots & c_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}a_{r2}\ \ldots & c_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1r} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}a_{r2}\ \ldots a_{rr} \end{vmatrix}}$$

r-ésima columna

Si el sistema es compatible y en el subsistema principal el número de incognitas no principales es cero, el sistema es *determinado*, es decir, tiene solución única.

En los demás casos es *indeterminado*, en el sentido de que tiene infinitas soluciones.

2.4. SISTEMAS HOMOGENEOS

Un sistema de ecuaciones lineales, tal que los términos constantes son todos nulos se llama *sistema homogéneo*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Todo sistema homogéneo tiene solución, pues se verifica para $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$; es decir, todo sistema homogéneo es compatible. No obstante, se dice que es *compatible* cuando tiene una solución distinta de la *solución trivial* $(0, 0, \ldots, 0)$.

Si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una solución del sistema, también lo es $(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$ para $\forall \lambda \in \mathfrak{R}$.

Es fácil de comprobar la siguiente

Proposición. Si un sistema homogéneo tiene más incógnitas que ecuaciones es compatible.

Finalmente vamos a estudiar un teorema que tendrá aplicación en capítulos posteriores.

> TEOREMA (*de compatibilidad*). *La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales homogéneas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas sea compatible es que el determinante de los coeficientes de las incógnitas sea igual a cero.*

En efecto, sea

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right.$$

Si

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \cdots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

podemos resolverlo por la regla de Cramer y tiene solución UNICA que es, precisamente, la solución trivial $(0, 0, \ldots, 0)$.

Por lo tanto, si el sistema tiene soluciones distintas de la solución trivial el determinante de los coeficientes ha de ser *cero*.

Recíprocamente, si el determinante de los coeficientes es cero tiene por lo menos una fila que es combinación lineal de las restantes filas (por la proposición 3, apartado 13, capítulo anterior) e igualmente la ecuación correspondiente será una combinación lineal de las otras, luego podremos prescindir de ella. El sistema que resulta de suprimir una ecuación tendrá mayor número de incógnitas que de ecuaciones, luego, por la proposición anterior, es compatible, c.q.d.

Resumiendo,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right\} \quad \text{compatible} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 1

Resuélvase el sistema homogéneo $\left.\begin{array}{rrrr} x_1 + & x_2 + & x_3 = & 0 \\ 2x_1 - & 3x_2 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 3x_3 = & 0 \end{array}\right\}$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad |M_1| = 0 \Rightarrow$$ El sistema homogéneo es compatible y, por tanto, compatible indeterminado.

El menor $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(M_1) = 2 <$ número de incógnitas.

Un sistema equivalente al dado es:

$$\left.\begin{array}{rrl} x_1 + & x_2 = & -x_3 \\ 2x_1 - & 3x_2 = & 0 \end{array}\right\}$$

Aplicando la regla de Cramer a este sistema,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \quad ; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -x_3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3x_3 \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -x_3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2x_3$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{3}{5}x_3 \quad ; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{2}{5}x_3$$

Si se desea expresar las infinitas soluciones, en función de un parámetro,

$$x_3 = \frac{-5}{3}x_1 = \frac{-5}{2}x_2 = t$$

$$x_1 = \frac{3}{5}t \quad ; \quad x_2 = -\frac{2}{5}t \quad ; \quad x_3 = t$$

Ejemplo 2

Discútase y resuélvase en los casos de compatibilidad el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrl} ax_1 + & x_2 + & x_3 = & 1 \\ x_1 + & ax_2 + & x_3 = & a \\ x_1 + & x_2 + & ax_3 = & a^2 \end{array}\right\}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$|M_1| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2)$$

1.º Para $a = -2$

$$\left.\begin{matrix} r(M_1) = 2 \\ r(M_2) = 3 \end{matrix}\right\} \; r(M_1) \neq r(M_2) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

2.º Para $a = 1$

$$\left.\begin{matrix} r(M_1) = 1 \\ r(M_2) = 1 \end{matrix}\right\} \; r(M_1) = r(M_2) < n \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

3.º Para $a \in R - \{1, -2\}$

$$\left.\begin{matrix} r(M_1) = 3 \\ r(M_2) = 3 \end{matrix}\right\} \; r(M_1) = r(M_2) = n \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

Resolución del segundo caso

Al ser el rango común 1, el sistema se reduce a la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Resolución del tercer caso

Utilizando la regla de Cramer,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = -(a+1)(a-1)^2 \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2 \quad ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1)^2$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|M_1|} = -\frac{a+1}{a+2} \quad ; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|M_1|} = \frac{1}{a+2} \quad ; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{|M_1|} = \frac{(a+1)^2}{(a+2)}$$

Ejemplo 3

Analícese y resuélvase para $\lambda \in Z$, el sistema

$$\left.\begin{matrix} 2x_1 + \lambda x_2 = 5 \\ \lambda x_1 - 3x_2 = 6 \\ x_1 + 4x_2 = \lambda \end{matrix}\right\}$$

Es necesario para que sea compatible que $r(M_1) \leq 2 \Rightarrow |M_2| = 0$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 5 \\ \lambda & -3 & 6 \\ 1 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$$

$|M_2| = (\lambda - 3)(-\lambda^2 - 3\lambda - 11)$.

Para $\lambda = 3$, usando el sistema formado por las dos primeras ecuaciones, equivalente al dado, se calculan por la regla de Cramer las soluciones $x_1 = 11/5$, $x_2 = 1/5$.

2.5. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. Resuélvanse los sistemas

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 6x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - 3x_2 &= 6 \\ x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= 10 \\ 2x_1 + 10x_2 &= 20 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 4 \\ 4x_1 - 6x_2 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

2. Resuélvanse los sistemas homogéneos

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 8x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3. Determínese el valor de m que hace compatible el sistema homogéneo

$$\left.\begin{aligned} mx_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Resuélvase.

(Adviértase que la compatibilidad de ese sistema homogéneo es referible a que admita soluciones distintas a la trivial (0, 0, 0).)

4. Discútase el sistema

$$\left.\begin{aligned} mx_1 + nx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + mnx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ny + mx_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

en función de los valores de los parámetros m y n.

Resolución.

5. Determínese el valor de p que hace compatibles las ecuaciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= p \\ 2x_2 - x_3 &= p \\ x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_3 &= 11 \end{aligned}\right\}$$

Resolución.

6. Analícese el siguiente sistema en función de los diferentes valores del parámetro μ.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \mu x_3 &= 1 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 &= 1 \\ \mu x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

7. Discusión y resolución del sistema

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 &= 0 \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

8. Analícese el siguiente sistema en función de los diferentes valores de a.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ ax_1 + 2x_3 &= 0 \\ ax_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

9. Se sabe que el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 - kx_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 &= 0 \\ kx_1 - x_2 + 13x_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

es compatible. Determínese k.

10. Sea el sistema

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1 + (2\lambda - \mu)x_2 &= \lambda + \mu - 3 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Calcúlense los valores de λ y μ que hacen el sistema compatible indeterminado.

3

Espacio afín y euclídeo de dimensión 3. Variedades lineales. Problemas de incidencias y métricos

3.1. ESPACIO AFIN

El espacio afín es el espacio ordinario de la Geometría elemental, análogamente a como se vio que el plano afín es el plano ordinario o intuitivo.

Si representamos por E el espacio ordinario, es inmediato que existe una aplicación f de $E \times E$ en el espacio vectorial V_3 de los vectores libres ordinarios.

$$E \times E \xrightarrow{f} V_3$$
$$(A, B) \longrightarrow f(A, B) = \{\overrightarrow{AB}\}$$

Esta aplicación tiene las mismas propiedades que en el caso del plano afín y son:

1. $f(AB) = -f(BA)$, pues $\{\overrightarrow{AB}\} = -\{\overrightarrow{BA}\}$
2. $f(AB) + f(BC) = f(AC)$, pues $\{\overrightarrow{AB}\} + \{\overrightarrow{BC}\} = \{\overrightarrow{AC}\}$.
3. Dado un punto A y un vector libre $\bar{x}$ existe un punto único P, tal que $f(AP) = \bar{x}$. Esta propiedad es consecuencia de que con origen en cada punto existe un representante único de cada vector libre.

El conjunto de puntos del espacio E con la anterior aplicación que le relaciona con el espacio vectorial V_3 se llama *espacio afín de dimensión tres.*

En general, *un conjunto C cualquiera y una aplicación f de $C \times C$ en V_3 que verifica las propiedades* 1, 2 *y* 3 *se llama espacio afín de dimensión tres.*

En este caso se trata de un espacio afín abstracto, es decir, de una estructura puramente algebraica sugerida por el espacio intuitivo elemental.

3.2. BIYECCION ENTRE LOS PUNTOS DE E_0 Y LOS VECTORES LIBRES DE V_3. REFERENCIA DE COORDENADAS

El espacio E con un punto fijo 0, llamado origen, se denotará E_0.

La aplicación f del espacio afín permite establecer una biyección entre los puntos de E_0 y los vectores libres de V_3, análogamente a lo que ocurría en el plano.

$$E_0 \xrightarrow{\varphi} V_3$$

$$A \longrightarrow \varphi(A) = \{\overrightarrow{OA}\}$$

Si en V_3 se fija una base $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3)$, a cada vector $\bar{x} \in V_3$ se le asigna biunívocamente una terna ordenada de números reales, sus coordenadas (o componentes), tales que $x = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3$.

$$E \xrightarrow{0} V_3 \xrightarrow{(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3)} V_3$$

$$A \longrightarrow \{\overrightarrow{OA}\} \longrightarrow (a_1\ a_2\ a_3)/\{\overrightarrow{OA}\} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3$$

El punto O y la base $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3)$ forman lo que llamaremos una referencia $R = \{O;\ \bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3\}$ del espacio E.

Esta referencia permite establecer una biyección entre los puntos del espacio y las ternas ordenadas de números reales.

$$E \xrightarrow{R = \{0;\ \bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3\}} \mathfrak{R}^3$$

$$A \longrightarrow (a_1\ a_2\ a_3)/\{\overrightarrow{OA}\} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3$$

(a_1, a_2, a_3) *son las coordenadas de A respecto de la referencia de coordenadas R.*

En la figura 3.1 se visualiza la referencia de coordenadas.

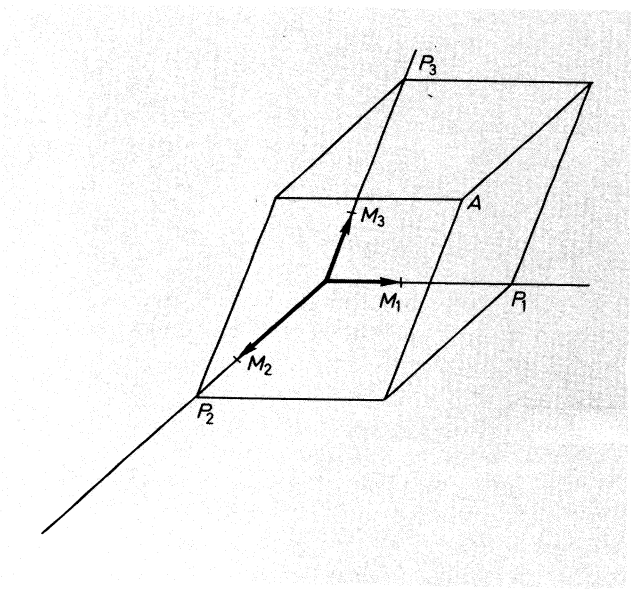


Fig. 3.1

$$\overrightarrow{OM_1} \in \bar{u}_1 \qquad \overrightarrow{OP_1} \in a_1\bar{u}_1$$
$$\overrightarrow{OM_2} \in \bar{u}_2 \qquad \overrightarrow{OP_2} \in a_2\bar{u}_2$$
$$\overrightarrow{OM_3} \in \bar{u}_3 \qquad \overrightarrow{OP_3} \in a_3\bar{u}_3$$

3.3. RECTA EN EL ESPACIO AFIN

Una recta queda determinada por un punto y una dirección. Supongamos que el punto sea $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ y la dirección la del vector $\bar{p} = (p_1\ p_2\ p_3)$.

$\overrightarrow{PP'} \in \bar{p}$

$\{\overrightarrow{AX}\} = \lambda\bar{p}$

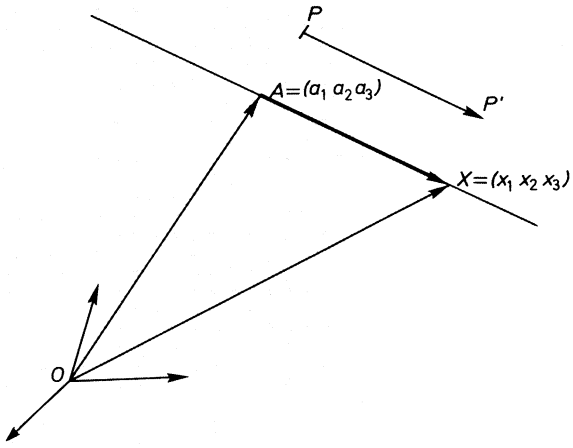


Fig. 3.2

Como $\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \{\overrightarrow{AX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\bar{p}$, donde X es un punto genérico de la recta, resulta que la ecuación vectorial es

$$\boxed{\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\bar{p}}$$

De la anterior ecuación, igualando las coordenadas, resultan las *ecuaciones paramétricas*:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda p_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda p_2 \\ x_3 &= a_3 + \lambda p_3 \end{aligned}}$$

Eliminando el parámetro λ, para lo cual basta despejar λ en las tres e igualar, se obtienen las ecuaciones *cartesianas*:

$$\frac{x_1 - a_1}{p_1} = \frac{x_2 - a_2}{p_2} = \frac{x_3 - a_3}{p_3}$$

La recta puede venir determinada por dos puntos $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ y $B = (b_1\ b_2\ b_3)$ en cuyo caso se puede tomar $\bar{p} = \{\overrightarrow{AB}\} = \{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ y queda reducida al caso anterior. Resulta:

Ecuación vectorial

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\,\{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda\,(b_1 - a_1) \\ x_2 &= a_2 + \lambda\,(b_2 - a_2) \\ x_3 &= a_3 + \lambda\,(b_3 - a_3) \end{aligned}$$

Ecuaciones cartesianas

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}$$

3.4. PLANO EN EL ESPACIO AFIN

Sea el plano determinado por el punto A y las direcciones de los vectores libres $\bar{p}$ y $\bar{q}$.

$$\begin{aligned} \bar{p} &= (p_1\ p_2\ p_3) \\ \bar{q} &= (q_1\ q_2\ q_3) \\ A &= (a_1\ a_2\ a_3) \end{aligned}$$

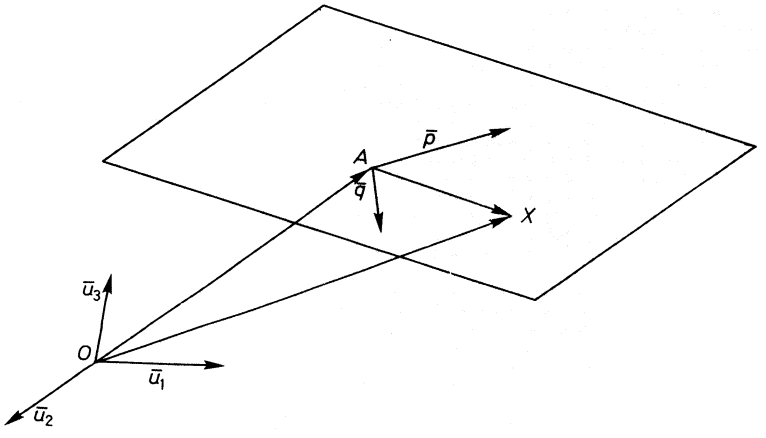


Fig. 3.3

Sea X un punto genérico del plano.
$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \{\overrightarrow{AX}\}$; pero $\{\overrightarrow{AX}\} = \lambda\,\bar{p} + \mu\,\bar{q}$, donde (λ, μ) son las coordenadas de $\{\overrightarrow{AX}\}$, vector contenido en el plano, respecto de la referencia $R' = \{A; \bar{p}, \bar{q}\}$, luego

Ecuación vectorial

$$\boxed{\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\,\bar{p} + \mu\,\bar{q}}$$

Igualando coordenadas en ambos miembros resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda p_1 + \mu q_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda p_2 + \mu q_2 \\ x_3 &= a_3 + \lambda p_3 + \mu q_3 \end{aligned}}$$

Ecuaciones paramétricas

Eliminando los parámetros λ y μ, para lo cual basta despejar en las dos ecuaciones y sustituir en la tercera, resultará la ecuación cartesiana de la forma

$$\boxed{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0}$$

Las ecuaciones paramétricas pueden escribirse en la forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 - a_1 - \lambda p_1 - \mu q_1 &= 0 \\ x_2 - a_2 - \lambda p_2 - \mu q_2 &= 0 \\ x_3 - a_3 - \lambda p_3 - \mu q_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Estas ecuaciones implican que el sistema homogéneo

$$\left.\begin{aligned} (x_1 - a_1)\,u + p_1 v + q_1 w &= 0 \\ (x_2 - a_2)\,u + p_2 v + q_2 w &= 0 \\ (x_3 - a_3)\,u + p_3 v + q_3 w &= 0 \end{aligned}\right\}$$

admite solución distinta de la trivial $(1, -\lambda, -\mu)$; por lo tanto, el determinante será nulo

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 - a_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 - a_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

Esta es la *ecuación cartesiana* del plano que puede escribirse directamente.

Si el plano viene definido por tres puntos $A = (a_1\ a_2\ a_3)$, $B = (b_1\ b_2\ b_3)$, $C = (c_1\ c_2\ c_3)$, basta con tomar $\bar{p} = \{\overrightarrow{AB}\}$, $\bar{q} = \{\overrightarrow{AC}\}$ y aplicar el método anterior.

$$\bar{p} = \{\overrightarrow{AB}\} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$\bar{q} = \{\overrightarrow{AC}\} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$$

Resulta:

$$\boxed{\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda[\{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\}] + \mu[\{\overrightarrow{OC}\} - \{\overrightarrow{OA}\}]} \quad \textit{Ecuación vectorial}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda(b_1 - a_1) + \mu(c_1 - a_1) \\ x_2 &= a_2 + \lambda(b_2 - a_2) + \mu(c_2 - a_2) \\ x_3 &= a_3 + \lambda(b_3 - a_3) + \mu(c_3 - a_3) \end{aligned}} \quad \textit{Ecuaciones paramétricas}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0} \quad \textit{Ecuaciones cartesianas}$$

La ecuación cartesiana se puede deducir de la siguiente forma:

Sea $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0$ la ecuación del plano. Hemos de determinar α, β, γ, δ con la condición de que pase por los puntos A, B, C, o sea,

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0 \\ \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 + \delta = 0 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 + \delta = 0 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 + \delta = 0 \end{cases}$$

La condición necesaria y suficiente para que exista solución no trivial $(\alpha\beta\gamma\delta)$ es

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Esta expresión es la ecuación cartesiana y equivale a la ecuación obtenida anteriormente, en forma de determinante, pues basta restar la segunda fila de las demás.

3.5. POSICIONES RELATIVAS DE DOS Y TRES PLANOS

Caso de dos planos. Sean dos planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha\, x_1 + \beta\, x_2 + \gamma\, x_3 + \delta = 0 \\ \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1 = 0 \end{cases}$$

Para que los planos tengan puntos comunes, el sistema formado por ambas ecuaciones ha de ser compatible, o sea

$$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = r$$

Puede ocurrir que $r = 1$ ó $r = 2$.

Si $r = 1 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1} = \dfrac{\delta}{\delta_1}$, en cuyo caso ambos planos *coinciden.*

Si $r = 2$, el sistema tiene infinitas soluciones; los planos *se cortan según una recta.* (Basta resolver aplicando el Teorema de Rouché.)

Para que los planos no tengan puntos en común el sistema formado por sus ecuaciones ha de ser incompatible, es decir,

$$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \neq r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

Como

$$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \leq r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \leq 2,$$

la única posibilidad es que

$$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{y} \quad r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = 2,$$

en cuyo caso se deduce como condición necesaria y suficiente que

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} \neq \frac{\delta}{\delta_1},$$

que es la condición de *paralelismo* (pues decimos que dos planos son paralelos cuando no tienen ningún punto en común).

Caso de tres planos. Sean las ecuaciones de los planos

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0 \\ \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1 = 0 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \delta_2 = 0 \end{cases}$$

A) Para que tengan puntos comunes ha de ser compatible el sistema, o sea:

$$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = r$$

a) Si $r = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0$, en cuyo caso los tres planos se cortan en un punto único cuyas coordenadas se obtienen aplicando la regla de Cramer.

b) Si $r = 2$, una ecuación es combinación lineal de las otras dos y puede suprimirse. Los tres planos se cortan según una recta (son coaxiales).

c) Si $r = 1$. las tres ecuaciones son una misma; los planos son coincidentes.

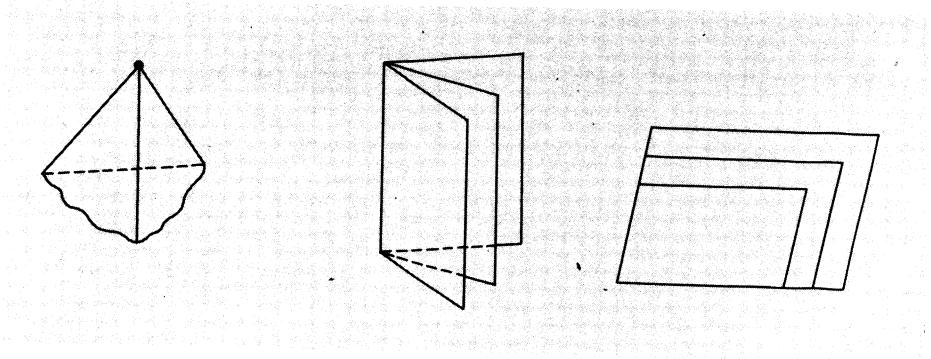


Fig. 3.4

B) Para que no tengan puntos comunes los tres planos, ha de ser incompatible el sistema, o sea

$$r = r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \neq r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = r'$$

El rango de la primera matriz es menor o igual que el de la segunda, y los rangos de ambas matrices difieren como máximo en una unidad.

Como los rangos son distintos, las únicas posibilidades son:

a) $r = 2$, $r' = 3$.

Si en las dos primeras filas existe un menor principal se cortan según una los dos primeros planos. Análogo razonamiento para los otros pares de filas. Las posiciones posibles se dibujan en los dos primeros esquemas de la figura 3.5.

b) $r = 1$, $r' = 2$.

Los tres planos son paralelos.

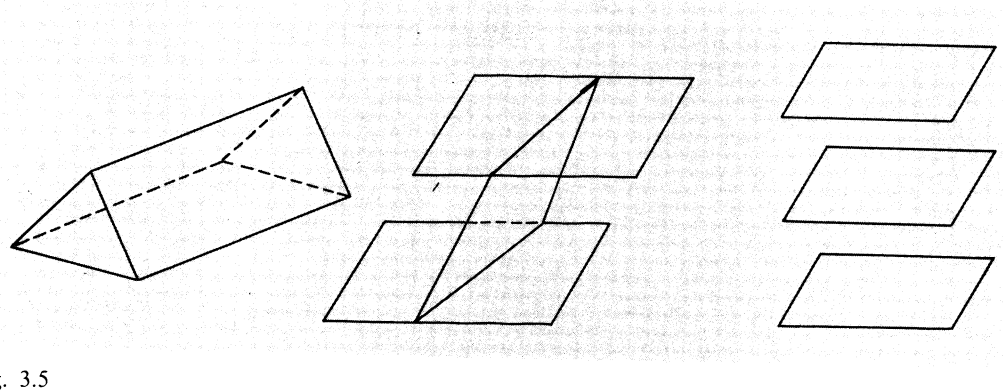


Fig. 3.5

3.6. HAZ DE PLANOS

Considérense dos planos de ecuaciones $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0 \\ \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1 = 0 \end{cases}$

La ecuación general de los planos que pasan por la recta intersección de ambos es

$$\boxed{(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta) + \lambda(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1) = 0}$$

En efecto: La ecuación anterior representa un plano por ser lineal en las variables.

Cualquier punto de la recta intersección de los planos dados verifica sus ecuaciones, luego también la ecuación anterior, ya que resulta $0 + \lambda \cdot 0 = 0$, para cualquier valor real de λ.

El conjunto de planos que pasan por una recta se llama «haz de planos de arista la recta». La ecuación general que hemos escrito más arriba representa el haz de arista la recta intersección de los dos planos.

El conjunto de planos paralelos a un plano $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0$, se dice que forma un *haz de planos paralelos*. La ecuación general de los planos del haz es

$$\boxed{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta + \lambda = 0}$$

Es evidente, puesto que

$$\frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta} = \frac{\gamma}{\gamma} \neq \frac{\delta}{\delta + \lambda}$$

3.7. RECTAS PARALELAS

Sean las rectas que pasan por los puntos $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ y $B = (b_1\ b_2\ b_3)$, y tienen las direcciones $\bar{p} = (p_1\ p_2\ p_3)$ y $\bar{q} = (q_1\ q_2\ q_3)$, respectivamente.

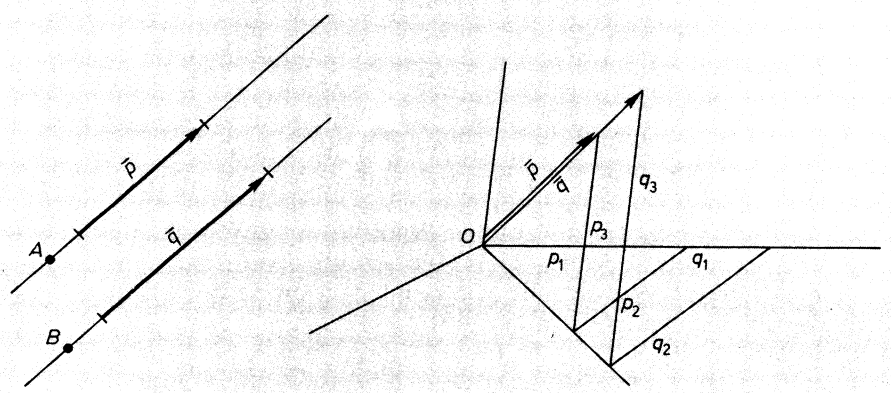


Fig. 3.6

La condición necesaria y suficiente para que las rectas

$$\frac{x_1 - a_1}{p_1} = \frac{x_2 - a_2}{p_2} = \frac{x_3 - a_3}{p_3} \quad \text{y} \quad \frac{x_1 - b_1}{q_1} = \frac{x_2 - b_2}{q_2} = \frac{x_3 - b_3}{q_3}$$

sean paralelas es que sus vectores de dirección lo sean, lo cual equivale a que las componentes de los mismos sean proporcionales.

$$\boxed{\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3}}$$

Esto puede observarse en la figura 3.6 por consideraciones geométricas de semejanza. También, escribiendo simplemente $\bar{p} = \lambda \bar{q}$.

Cuando las ecuaciones de una recta no vienen escritas en la forma anterior, sino como intersección de dos planos

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 + \delta' = 0 \\ \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3 + \delta'' = 0 \end{array}\right\},$$

se presenta el problema de hallar las coordenadas de un vector de dirección, que son precisamente las coordenadas de un punto de la paralela por el origen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 = 0 \\ \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Se acostumbra a tomar

$$\left(\begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \gamma' & \alpha' \\ \gamma'' & \alpha'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} \right)$$

La condición de paralelismo es la misma anterior, aplicada a este vector de dirección.

3.8. PARALELISMO DE RECTA Y PLANO

Para que una recta sea paralela a un plano ha de ser incompatible el sistema formado por la ecuación del plano y las ecuaciones de la recta.

Como una recta viene definida por la intersección de dos planos, el sistema que ha de ser incompatible será

$$\begin{array}{ll} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0 & \text{ecuación del plano} \\ \left.\begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1 = 0 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \delta_2 = 0 \end{array}\right\} & \text{ecuaciones de la recta} \end{array}$$

Se ha de verificar:

1.º) $$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 2$$

(No puede ser $r = 1$, puesto que los dos últimos planos determinan una recta y, por lo tanto, se cortan.)

2.º) $$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = 3$$

Al estudiar más adelante el espacio euclídeo, será posible establecer condiciones más sencillas.

3.9. DEPENDENCIA LINEAL EN ESPACIOS AFINES. VARIEDADES LINEALES

3.9.1. Ecuaciones de la recta y el plano

Ha quedado establecido que la ecuación de la recta definida por los puntos A, B tiene la forma vectorial

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda[\{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\}] = (1 - \lambda)\{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\{\overrightarrow{OB}\}$$

que puede expresarse

$$\begin{gathered} \{\overrightarrow{OX}\} = \lambda_1\{\overrightarrow{OA}\} + \lambda_2\{\overrightarrow{OA}\} \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{gathered}$$

La ecuación del plano definido por tres puntos A, B, C en forma vectorial es

$$\begin{aligned} \{\overrightarrow{OX}\} &= \{\overrightarrow{OA}\} + \lambda[\{\overrightarrow{OB}\} - \{\overrightarrow{OA}\}] + \mu[\{\overrightarrow{OC}\} - \{\overrightarrow{OA}\}] = \\ &= (1 - \lambda - \mu)\{\overrightarrow{OA}\} + \lambda\{\overrightarrow{OB}\} + \mu\{\overrightarrow{OC}\} \end{aligned}$$

que puede tener la forma

$$\begin{gathered} \{\overrightarrow{OX}\} = \lambda_1\{\overrightarrow{OA}\} + \lambda_2\{\overrightarrow{OB}\} + \lambda_3\{\overrightarrow{OC}\} \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{gathered}$$

Si se escribe A en vez de $\{\overrightarrow{OA}\}$, B en vez de $\{\overrightarrow{OB}\}$, etc., lo cual es lógico, porque el espacio afín está formado por los puntos A, B, ... y no por los vectores $\{\overrightarrow{OA}\}$, $\{\overrightarrow{OB}\}$, ... resulta:

Ecuación de la recta AB:

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B$$
$$1 = \lambda_1 + \lambda_2$$

Ecuación del plano ABC:

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$$
$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

Como se ve, la semejanza entre la ecuación de la recta y la del plano es total.

3.9.2. Puntos colineales

Se llaman puntos *colineales* los que pertenecen a la misma recta.
Un punto genérico X de la recta AB se dice que depende linealmente de los puntos A y B. Por lo tanto

$$X \text{ depende linealmente de } \{A, B\} \overset{\text{(def.)}}{\Leftrightarrow} X = \lambda_1 A + \lambda_2 B, \quad 1 = \lambda_1 + \lambda_2$$

Para determinar una recta bastan dos puntos, pero también puede venir definida superabundantemente por más de dos, por ejemplo, tres, A, B, C.

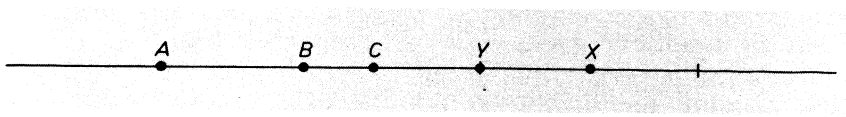


Fig. 3.7

Para cualquier punto de la recta X, se verifica

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$$
$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

En efecto: Sea Y un punto de la recta AB.
Por lo tanto, $Y = \gamma_1 A + \gamma_2 B$, $1 = \gamma_1 + \gamma_2$.
Otro punto X de la recta YC verificará

$$X = \mu_1 C + \mu_2 Y, \mu_1 + \mu_2 = 1$$

luego

$$X = \mu_1 C + \mu_2(\gamma_1 A + \gamma_2 B) = \mu_2\gamma_1 A + \mu_2\gamma_2 B + \mu_1 C$$
$$\mu_2\gamma_1 + \mu_2\gamma_2 + \mu_1 = \mu_2(\underbrace{\gamma_1 + \gamma_2}_{\substack{\| \\ 1}}) + \mu_1 = \mu_2 + \mu_1 = 1$$

Esta propiedad se generaliza a n puntos de la recta

$$X = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n$$
$$1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

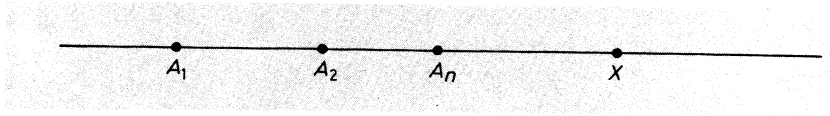


Fig. 3.8

Por definición, si n puntos son colineales, se dice que cualquier punto de su recta depende linealmente de ellos.

$$X \text{ d.l. } \{A_1\ A_2 \ldots A_n\} \Leftrightarrow X = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_n A_n \qquad 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

3.9.3. Puntos coplanarios

Se llaman puntos *coplanarios* los que están en el mismo plano.

Tres puntos no alineados A, B, C determinan un plano. Cualquier punto X del plano se dice que depende linealmente de A, B, C. Se verifica entonces

$$X = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C \qquad 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

En general, dados n puntos coplanarios $A_1\ A_2 \ldots A_n$ se dice que cualquier punto X de su plano depende linealmente de ellos y se verifica

$$X = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n \qquad 1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

Como puede observarse, la semejanza es total con el caso de los puntos colineales.

3.9.4. Dependencia lineal

Basándonos en los casos anteriores, parece lógico establecer las definiciones formales siguientes:

Primera definición

X d.l. $\{A_1 \ldots A_n\} \Leftrightarrow X = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n$, $1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Segunda definición

$\{A_1 \ldots A_n\}$ l.d. $\Leftrightarrow$ Uno de los puntos depende linealmente de los otros.

Tercera definición

$\{A_1 \ldots A_n\}$ l.i. $\Leftrightarrow$ No son linealmente dependientes.

El máximo número de puntos linealmente independientes en la recta es dos.

El máximo número de puntos linealmente independientes en el plano es tres.

Cuarta definición

Si $\{A_1 \ldots A_p\}$ son linealmente independientes, el conjunto de puntos $X = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_p A_p$, $1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p$ se llama *variedad lineal de dimensión* p-1.

Como consecuencia, la recta es una variedad lineal de dimensión 1; el plano, de dimensión 2.

Las variedades lineales de dimensión n-1 se llaman *hiperplanos*.

En la recta afín los hiperplanos son puntos.
En el plano afín los hiperplanos son rectas.
En el espacio afín los hiperplanos son planos.

3.10. ESPACIO EUCLIDEO. ESTRUCTURA METRICA

En el espacio vectorial tridimensional ordinario V_3 se define una multiplicación escalar, análogamente a como se hizo en el plano. De esta forma resulta que V_3 es un espacio vectorial euclídeo.

Se tiene entonces que el espacio afín E que venimos considerando es un *espacio euclídeo*, según la definición que ya conocemos, puesto que V_3 es un espacio vectorial euclídeo.

Definimos la aplicación de $E \times E$ en $\mathcal{R}_+$: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$
Se demuestra igual que en el plano que esta aplicación es una *distancia*.

Como E está dotado de una distancia, resulta ser un *espacio métrico*.

3.11. REGULARIDAD DE LA MATRIZ FUNDAMENTAL *U*

A) Relación entre los cosenos directores de una recta

Se llaman *ángulos directores* de una recta los ángulos que forma con los ejes de coordenadas.

Se llaman *cosenos directores* de una recta los cosenos de sus ángulos directores.

Consideremos la recta OA de ángulos directores φ_1, φ_2, φ_3.

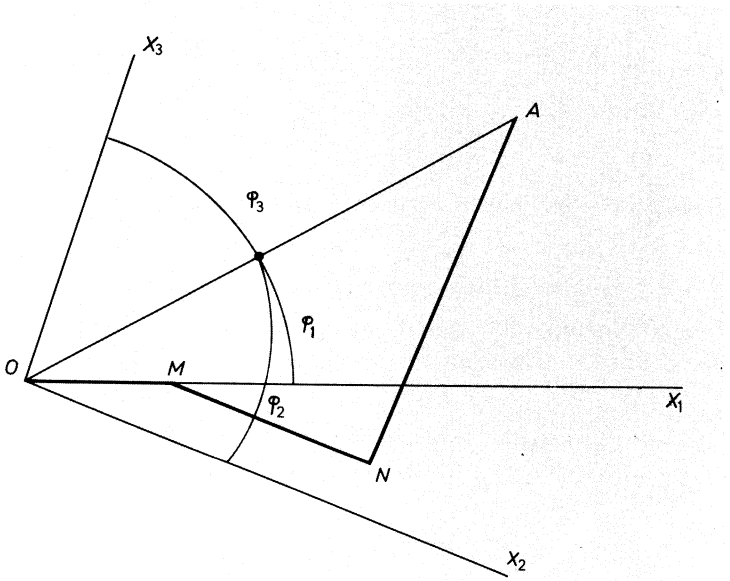


Fig. 3.9

$$\widehat{X_1 OX_2} = \lambda$$
$$\widehat{X_1 OX_3} = \mu$$
$$\widehat{X_3 OX_2} = \gamma$$

Vamos a proyectar la poligonal $OMNA$ ($MN \,//\, OX_2$; $NA \,//\, OX_3$) sobre las cuatro rectas OX_1, OX_2, OX_3, OA, igualando a la proyección de su resultante.

Sea

$$OM = a_1, \quad MN = a_2, \quad NA = a_3, \quad OA = \rho$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Proyección sobre } OX_1\colon a_1 + a_2 \cos\lambda + a_3 \cos\mu - \rho\cos\varphi_1 = 0 \\ \text{Proyección sobre } OX_2\colon a_1 \cos\lambda + a_2 + a_3 \cos\gamma - \rho\cos\varphi_2 = 0 \\ \text{Proyección sobre } OX_3\colon a_1 \cos\mu + a_2 \cos\gamma + a_3 - \rho\cos\varphi_3 = 0 \\ \text{Proyección sobre } OA\ \colon a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2 + a_3 \cos\varphi_3 - \rho = 0 \end{array}\right\}$$

El anterior sistema homogéneo de las variables $(a_1, a_2, a_3, -\rho)$ es *compatible*, luego

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & \cos\varphi_1 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\gamma & \cos\varphi_2 \\ \cos\mu & \cos\gamma & 1 & \cos\varphi_3 \\ \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 & \cos\varphi_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

relación entre los cosenos directores que han de verificar *todas las rectas* y, en particular, la verificará la recta perpendicular al plano $Ox_1 x_2$, para la cual

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

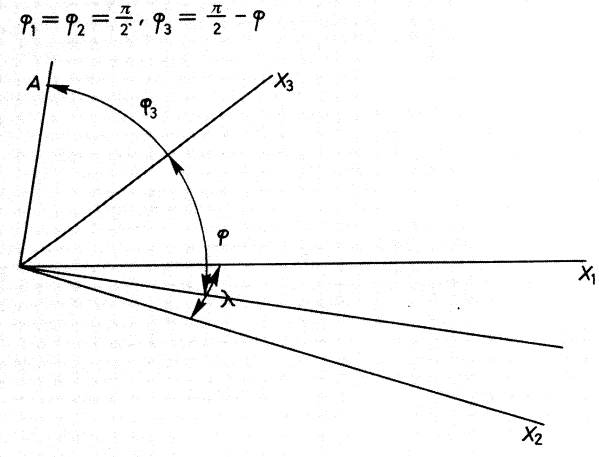


Fig. 3.10

luego queda

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & 0 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\gamma & 0 \\ \cos\mu & \cos\gamma & 1 & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\varphi & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde resulta

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\mu & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\lambda$$

B) Volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3)$

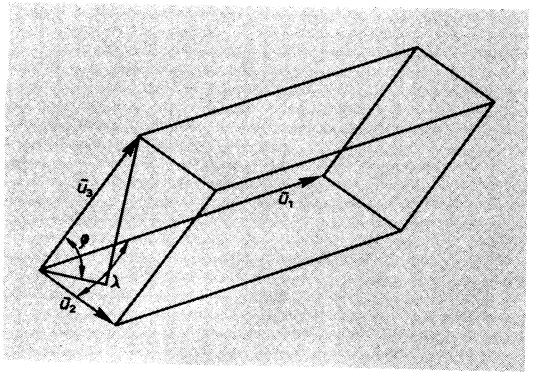


Fig. 3.11

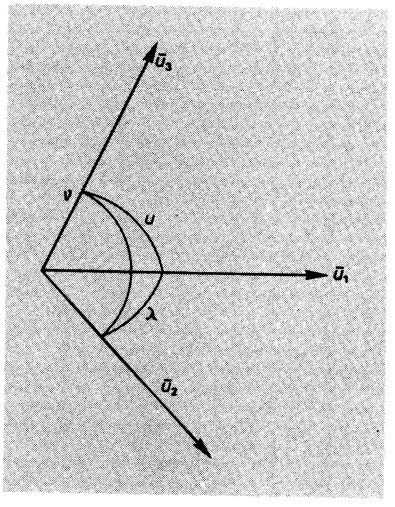


Fig. 3.12

Volumen = (Area de la base) × (altura) = $(|\bar{u}_2|\,|\bar{u}_2|\operatorname{sen}\lambda) \times (|\bar{u}_3|\operatorname{sen}\varphi) =$
$= |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2|\,|\bar{u}_3|\operatorname{sen}\lambda \cdot \operatorname{sen}\varphi$

C) Regularidad de U

Demostremos que la matriz U es regular. En efecto,

$$U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |\bar{u}_1|^2 & |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2|\cos\lambda & |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_3|\cos\mu \\ |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2|\cos\lambda & |\bar{u}_2|^2 & |\bar{u}_2|\,|\bar{u}_3|\cos\gamma \\ |\bar{u}_1|\,|\bar{u}_3|\cos\mu & |\bar{u}_2|\,|\bar{u}_3|\cos\gamma & |\bar{u}_3|^2 \end{vmatrix}$$

$$= |\bar{u}_1|^2\,|\bar{u}_2|^2\,|\bar{u}_3|^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\mu & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = |\bar{u}_1|^2\,|\bar{u}_2|^2\,|\bar{u}_3|^2 \operatorname{sen}^2\lambda \operatorname{sen}^2\varphi =$$
$$= (\text{volumen paralelepípedo})^2$$

Para que $|U| = 0$, o sea, para que el volumen del paralelepípedo sea nulo, las tres rectas habrían de ser coplanarias, lo cual es imposible, pues los vectores $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3)$ son linealmente independientes por formar base; luego

$$|U| \neq 0, \quad \text{c.q.d.}$$

3.12. COORDENADAS CONTRAVARIANTES Y COVARIANTES

De ahora en adelante representaremos con supraíndices las coordenadas ordinarias, a las que llamaremos *contravariantes.*

Así, $\bar{x} = x^1\bar{u}_1 + x^2\bar{u}_2 + x^3\bar{u}_2$ tiene de coordenadas $(x^1\ x^2\ x^3)$ respecto de la base $B = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$.

Definimos las *coordenadas covariantes* exactamente igual que se hace en el plano. Se representan con subíndices.

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x} \cdot \bar{u}_1 = x^1u_{11} + x^2u_{21} + x^3u_{22} \\ x_2 &= \bar{x} \cdot \bar{u}_2 = x^1u_{12} + x^2u_{22} + x^3u_{32} \\ x_3 &= \bar{x} \cdot \bar{u}_3 = x^1u_{13} + x^2u_{23} + x^3u_{33} \end{aligned}$$

Usando la notación matricial

$$\boxed{(x_1\ x_2\ x_3) = (x^1\ x^2\ x^3)\ U}$$

y puesto que U es regular, según vimos en el apartado anterior, tiene matriz inversa U^{-1}, lo que permite escribir

$$\boxed{(x^1\ x^2\ x^3) = (x_1\ x_2\ x_3)\ U^{-1}}$$

3.13. EXPRESIONES DIVERSAS DEL PRODUCTO ESCALAR

Sea $\bar{x} = (x^1\ x^2\ x^3)$, $\bar{y} = (y^1\ y^2\ y^3)$, es decir:

$$\bar{x} = x^1\bar{u}_1 + x^2\bar{u}_2 + x^3\bar{u}_3 \quad ; \quad \bar{y} = y^1\bar{u}_1 + y^2\bar{u}_2 + y^3\bar{u}_3$$

Entonces,

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x^1\bar{u}_1 + x^2\bar{u}_2 + x^3\bar{u}_3)(y^1\bar{u}_1 + y^2\bar{u}_2 + y^2\bar{u}_3)$$

Por las propiedades del producto escalar, se puede desarrollar el producto de los paréntesis, y resulta:

$$\begin{aligned} \bar{x} \cdot \bar{y} = {} & x^1y^1(\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1) + x^1y^2(\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2) + x^1y^3(\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3) + x^2y^1(\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1) + \\ & + x^2y^2(\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2) + x^2y^3(\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_3) + x^3y^1(\bar{u}_3 \cdot \bar{u}_1) + x^3y^2(\bar{u}_3 \cdot \bar{u}_2) + x^3y^3(\bar{u}_3 \cdot \bar{u}_3) \end{aligned}$$

Haciendo $g_{ij} = \bar{u}_i\bar{u}_j$, $(i,j = 1, 2, 3)$, esta expresión puede escribirse en forma de

producto de matrices:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x^1\ x^2\ x^3) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

o bien,

1. $\bar{x} \cdot \bar{y} = (x^1\ x^2\ x^3)\ U \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$

A partir de aquí, y con las fórmulas de paso entre coordenadas covariantes y contravariantes, se deducen las demás expresiones del producto escalar:

2. $\bar{x} \cdot \bar{y} = (x^1\ x^2\ x^3)\ U \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} = (y^1\ y^2\ y^3)\ U \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (y_1\ y_2\ y_3) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = y_1 x^1 + y_2 x^2 + y_3 x^3$$

3. $\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$, pero $\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = (U^{-1})' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, luego

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_1\ x_2\ x_3)\ (U^{-1})' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

3.14. PERPENDICULARIDAD

Sea el plano $\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \rho = 0$. Si $A = (a^1\ a^2\ a^3)$ es un punto del plano se verificará $\alpha a^1 + \beta a^2 + \gamma a^3 + \delta = 0$.

Restando queda $\alpha(x^1 - a^1) + \beta(x^2 - a^2) + \gamma(x^3 - a^3) = 0$.

Como $(x^1 - a^1,\ x^2 - a^2,\ x^3 - a^3)$ son las coordenadas (o componentes) de un vector $\overrightarrow{AX}$ contenido en el plano, donde A es fijo y X variable, resulta que:

Si $\bar{b} = (\alpha, \beta, \gamma)$ es un vector en coordenadas covariantes,

$$\overrightarrow{AX} \cdot \bar{b} = \alpha(x^1 - a^1) + \beta(x^2 - a^2) + \gamma(x^3 - a^3) = 0$$

y, por lo tanto, $\bar{b}$ es *perpendicular* al plano.

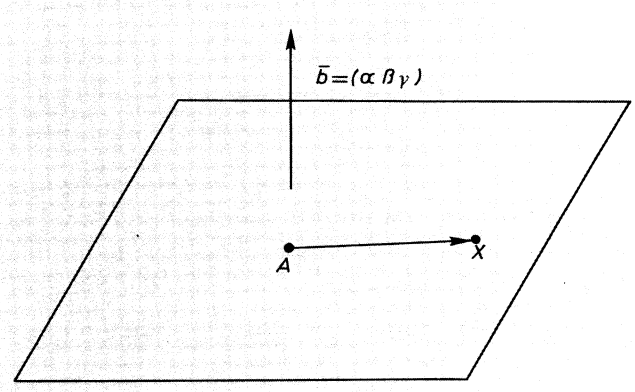


Fig. 3.13

Consecuencias:

1.ª *Plano paralelo por* $A = (a^1\ a^2\ a^3)$ *al plano* $\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta = 0$

Puesto que es paralelo al anterior tendrá el mismo vector normal $(\alpha\ \beta\ \gamma)$; y como ha de pasar por $A = (a^1\ a^2\ a^3)$ será

$$\alpha(x^1 - a^1) + \beta(x^2 - a^2) + \gamma(x^3 - a^3) = 0$$

2.ª *Recta que pasa por* $A = (a^1\ a^2\ a^3)$ *y perpendicular al plano*

$$\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta = 0$$

(α, β, γ) son las coordenadas covariantes de un vector paralelo a la recta que se busca.

Si sus coordenadas contravariantes son $(\alpha'\ \beta'\ \gamma') = (\alpha\ \beta\ \gamma)\ U^{-1}$, la ecuación de la recta será

$$\frac{x^1 - a^1}{\alpha'} = \frac{x^2 - a^2}{\beta'} = \frac{x^3 - a^3}{\gamma'}$$

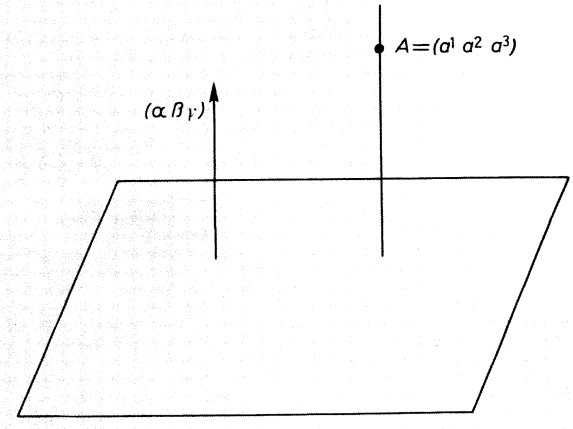


Fig. 3.14

3.ª *Plano que pasa por un punto y perpendicular a una recta*
El punto $A = (a^1\ a^2\ a^3)$, la recta

$$\frac{x^1 - b^1}{p^1} = \frac{x^2 - b^2}{p^2} = \frac{x^3 - b^3}{p^3};$$

$(p^1\ p^2\ p^3)$ son las coordenadas contravariantes de un vector que tiene la dirección de la recta, o sea, perpendicular al plano que se busca. Las coordenadas covariantes de este mismo vector serán $(p_1\ p_2\ p_3) = (p^1\ p^2\ p^3)\ U$, luego la ecuación del plano será $p_1(x^1 - a^1) + p_2(x^2 - a^2) + p_3(x^3 - a^3) = 0$.

4.ª *Condición necesaria y suficiente para que la recta*

$$\frac{x^1 - a^1}{p^1} = \frac{x^2 - a^2}{p^2} = \frac{x^3 - a^3}{p^3}$$ sea paralela al plano $\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta = 0$.

Basta obligar a que el vector de coordenadas contravariantes $(p^1\ p^2\ p^3)$ y el vector de coordenadas covariantes $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ sean perpendiculares, o sea

$$\alpha p^1 + \beta p^2 + \gamma p^3 = 0$$

3.15. ANGULOS

1. *Angulo de dos rectas*

$$\frac{x^1 - a^1}{p^1} = \frac{x^2 - a^2}{p^2} = \frac{x^3 - a^3}{p^3};$$

$$\frac{x^1 - b^1}{q^1} = \frac{x^2 - b^2}{q^2} = \frac{x^3 - b^3}{q^3}$$

El ángulo que forman los dos vectores de dirección $\bar{p} = (p^1\ p^2\ p^3)$ $\bar{q} = (q^1\ q^2\ q^3)$, o sea

$$\cos\varphi = \frac{\bar{p}\cdot\bar{q}}{|\bar{p}|\,|\bar{q}|} = \frac{(p^1\ p^2\ p^3)\ U \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}}{\sqrt{(p^1\ p^2\ p^3)\ U \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}}\ \sqrt{(q^1\ q^2\ q^3)\ U \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}}}$$

2. *Angulo de dos planos* $\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta = 0$; $\alpha_1 x^1 + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x^3 + \delta_1 = 0$.

Es el ángulo que forman los vectores perpendiculares $\bar{b} = (\alpha\,\beta\,\gamma)$ $\bar{b}_1 = (\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)$ dados en coordenadas covariantes.

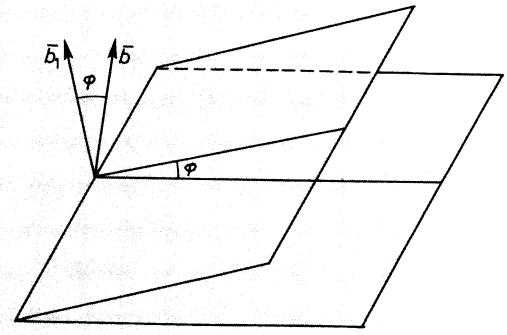


Fig. 3.15

$$\cos\varphi = \frac{\bar{b}\cdot\bar{b}_1}{|\bar{b}|\,|\bar{b}_1|} = \frac{(\alpha\,\beta\,\gamma)\,(U^{-1})'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{pmatrix}}{\sqrt{(\alpha\,\beta\,\gamma)\,(U^{-1})'\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}\ \sqrt{(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)\,(U^{-1})'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta^1\\ \gamma_1\end{pmatrix}}}$$

3. *Angulo de la recta*

$$\frac{x^1 - a^1}{p^1} = \frac{x^2 - a^2}{p^2} = \frac{x^3 - a^3}{p^3}$$

con el plano

$$\alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta = 0$$

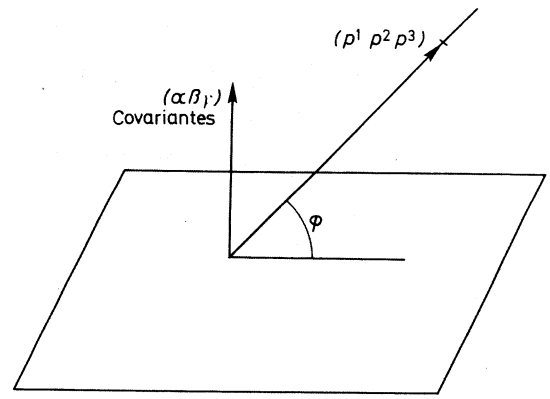


Fig. 3.16

El ángulo que forma la recta con el plano es el complementario del que forman los vectores cuyas coordenadas son

$$\begin{matrix}(p^1\ p^2\ p^3) & \text{contravariantes}\\ (\alpha\ \beta\ \gamma\ ) & \text{covariantes}\end{matrix}$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{(\alpha\ \beta\ \gamma)\begin{pmatrix}p^1\\ p^2\\ p^3\end{pmatrix}}{\sqrt{(\alpha\ \beta\ \gamma)\,(U^{-1})'\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}\ \sqrt{(p^1\ p^2\ p^3)\,U\begin{pmatrix}p^1\\ p^2\\ p^3\end{pmatrix}}}$$

3.16. DISTANCIAS

1. *Distancia entre dos puntos*

Sean $A = (a^1\ a^2\ a^3)$, $B = (b^1\ b^2\ b^3)$

$$d(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}, \quad \overrightarrow{AB} = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, b^3 - a^3)$$

$$d(AB) = \sqrt{(b^1 - a^1, b^2 - a^2, b^3 - a^3)\,U\begin{pmatrix}b^1 - a^1\\ b^2 - a^2\\ b^3 - a^3\end{pmatrix}}$$

2. *Distancia de un punto a un plano*

Se traza por el punto P la perpendicular al plano al que corta en M. La distancia que buscamos es la existente entre los puntos P y M.

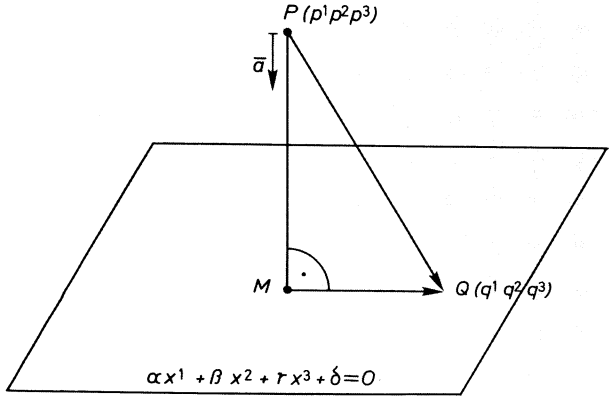


Fig. 3.17

$|\overrightarrow{PM}| = \overrightarrow{PQ} \cdot \bar{a}$, donde Q es un punto cualquiera del plano y $\bar{a}$ es un vector perpendicular al plano y de módulo unidad.

$$\overrightarrow{PQ} = (q^1 - p^1, q^2 - p^2, q^3 - p^3) \text{ contravariantes}$$

$$\bar{a} = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\ \beta\ \gamma)\ U^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}} \quad \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\ \beta\ \gamma)\ U^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}} \quad \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha\ \beta\ \gamma)\ U^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}} \right) \text{ covariantes}$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \bar{a} = \frac{|\alpha(q^1 - p^1) + \beta(q^2 - p^2) + \gamma(q^3 - p^3)|}{\sqrt{(\alpha\ \beta\ \gamma)\ U^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}}$$

3. *Distancia de un punto a una recta*

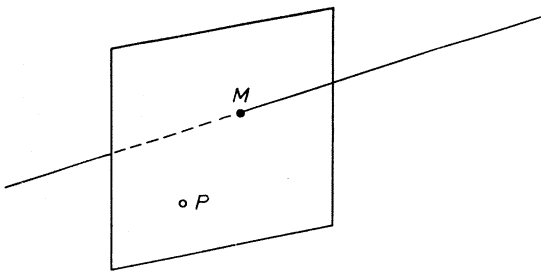


Fig. 3.18

Se traza por el punto P el plano perpendicular a la recta y se determinan las coordenadas de su intersección M con la recta.

La distancia pedida es $d(P, M)$.

4. *Distancia entre dos planos paralelos*

Es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro. Se reduce, entonces, al caso 2.

5. *Distancia entre dos rectas paralelas*

Es la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra. Se reduce al caso 3.

3.17. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. Ecuaciones de las siguientes rectas:

a) recta que pasa por $A = (1, 1, 2)$ y que tiene la dirección $\bar{p} = (2, -3, 5)$;
b) recta definida por los puntos $A = (2, 1, -2)$, $B = (3, 1, 5)$.

Establézcanse ambas en forma cartesiana y paramétrica.

2. Ecuaciones de los siguientes planos:

a) plano determinado por el punto $A = (2, 0, 3)$ y las direcciones de los vectores $\bar{p} = (1, 2, 5)$ y $\bar{q} = (-1, 2, -6)$;
b) plano determinado por los puntos $A = (1, 3, 5)$, $B = (-2, 7, 3)$ y $C = (0, 4, 1)$.

Determínense ambos en forma cartesiana y paramétrica.

3. Estúdiense las posiciones relativas de las siguientes ternas y pares de planos:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 7x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 18x_2 - 9x_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

4. Hállense las ecuaciones de los siguientes planos:

a) plano que pasa por el punto (3, 7, 1) y por la recta intersección del par de planos:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3 = 0; \end{cases}$$

b) plano que pasa por el punto (1, 1, 3) y paralelo al plano $x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 4 = 0$.

5. Hállense las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (1, 0, 7)$ y paralela al vector $\bar{p} = (2, -1, -3)$;
b) recta que pasa por los puntos $A = (-1, 3, 1)$, $B = (1, 0, -6)$.

6. Hállese la matriz fundamental correspondiente a la base

$$\begin{vmatrix} \bar{u}_1 \end{vmatrix} = 2$$
$$\begin{vmatrix} \bar{u}_2 \end{vmatrix} = 3$$
$$\begin{vmatrix} \bar{u}_3 \end{vmatrix} = 2$$

Con esta matriz fundamental, calcúlense:

a) coordenadas covariantes de $\bar{x} = (3, 1, 0)$;

b) producto escalar de $\bar{x} = (1, 1, 4)\ \bar{y} = (0, 1, -2)$;

c) plano que pasa por $A = (1, 1, 1)$ y perpendicular a la recta

$$\frac{x^1 - 2}{2} = \frac{x^2}{4} = \frac{x^3 - 1}{-1}$$

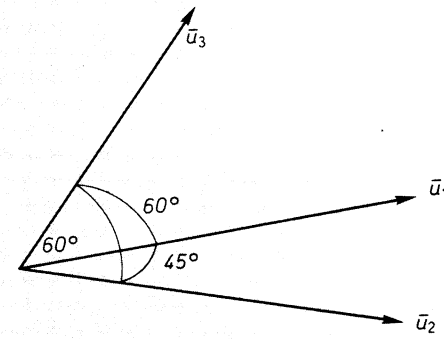


Fig. 3.19

d) recta que pasa por $A = (3, 0, -2)$ y perpendicular al plano

$$x^1 - x^2 + 3x^3 - 7 = 0$$

7. Ecuación del plano paralelo a $x^1 + 5x^2 - 7x^3 = 0$ por el punto $A = (3, 2, 5)$.

8. Con la referencia $|\bar{u}_1| = |\bar{u}_2| = 1$, $|\bar{u}_3| = 2$ se resolverán los siguientes ejercicios de ángulos:

a) ángulo de las rectas:

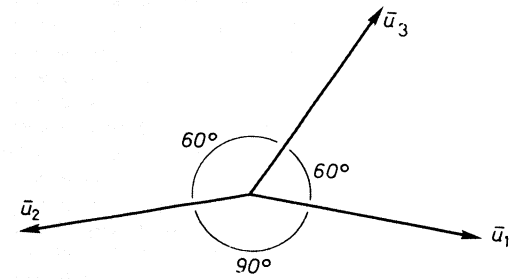


Fig. 3.20

$$\frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 0}{3} = \frac{x^3 - 1}{5}, \quad \frac{x^1 - 7}{8} = \frac{x^2 - 3}{0} = \frac{x^3 - 5}{-1}$$

b) ángulo de los planos:

$$\begin{cases} x^1 - 3x^2 + 2x^3 - 5 = 0 \\ 2x^1 + x^2 - 5x^3 + 4 = 0 \end{cases}$$

c) ángulo de la recta:

$$\frac{x^1 - 1}{2} = \frac{x^2 - 2}{-1} = \frac{x^3 - 4}{3}$$

con el plano

$$x^1 + 4x^2 - 3x^3 + 7 = 0$$

9. Con la misma referencia del ejercicio anterior, hállense:
a) distancia entre los puntos $A(0, 3, -1)$ y $B(1, 0, -2)$;
b) distancia del punto $A(1, 2, 0)$ al plano $3x^1 + x^2 - x^3 + 5 = 0$;
c) distancia del punto $A(1, 0, 1)$ a la recta

$$\frac{x^1 - 0}{2} = \frac{x^2 - 1}{0} = \frac{x^3 - 2}{1};$$

d) distancia entre los dos planos paralelos $x^1 - 2x^2 + 3x^3 + 5 = 0$ y $2x^1 - 4x^2 + 6x^3 + 7 = 0$;
e) distancia entre las rectas paralelas

$$\frac{x^1 - 2}{1} = \frac{x^2 - 1}{1} = \frac{x^3 + 3}{2} \text{ y } \frac{x^1 - 1}{1} = \frac{x^2 + 1}{1} = \frac{x^3 - 0}{2}.$$

10. Hállese la mínima distancia entre las dos rectas

$$\frac{x^1 - 0}{0} = \frac{x^2 - 1}{1} = \frac{x^3 + 3}{2}; \quad \frac{x^1 - 1}{1} = \frac{x^2 + 1}{-1} = \frac{x^3 - 0}{3}$$

y la ecuación de la perpendicular común.

4

Areas y volúmenes

4.1. INTRODUCCION

En este capítulo se van a considerar sólo referencias ortonormales de coordenadas. Se empezará calculando en el plano euclídeo el área de un triángulo definido por las coordenadas de sus vértices, para deducir, a partir de ésta, el área de un polígono convexo cualquiera.

Conocidas las áreas de los polígonos en el plano euclídeo es inmediato el cálculo del área de un polígono cualquiera del espacio euclídeo, según se verá.

Si se tratase de un polígono cóncavo, ha de descomponerse, en cada caso, en polígonos convexos, tanto en el plano como en el espacio euclídeo, y se reduce al caso anterior.

Un polígono alabeado no define un área, a no ser que se especifique la parte que se considera. En la figura 4.1 se representa un cuadrilátero alabeado y las dos posibilidades de área a considerar. Resultan un par de polígonos (triángulos en este caso) convexos.

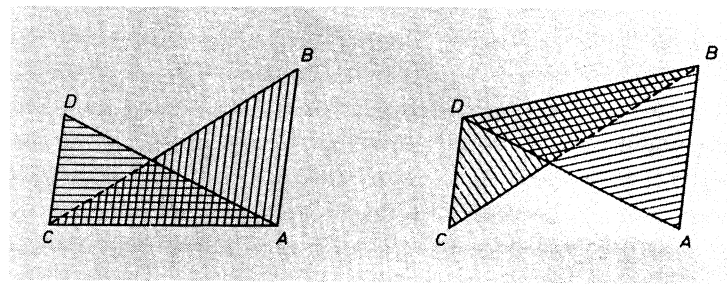


Fig. 4.1

Se calculará luego el volumen del paralelepípedo y, a partir de éste el del tetraedro. De la misma forma que en el plano euclídeo un polígono se descompone siempre en triángulos, un poliedro admite la descomposición en tetraedros, de manera que, conocido el volumen del tetraedro, se puede conocer el de cualquier poliedro.

No tiene interés hallar fórmulas que expresen el volumen de un poliedro general, en función de las coordenadas de sus vértices. En todo caso, el cálculo debe constituir un problema particular, dibujando el poliedro (en perspectiva caballera, por ejemplo) y estudiando la descomposición más conveniente. La resolución se desarrollará, aplicando solamente fórmulas de ángulos y distancias.

4.2. AREA DEL TRIANGULO

Si $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ son los vértices del triángulo ABC de la figura 4.2, el área encerrada por ese triángulo tiene una expresión muy fácil de recor-

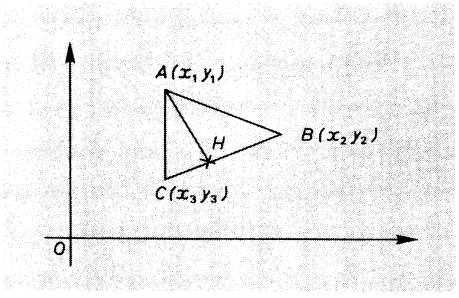


Fig. 4.2

dar, si se escribe en forma de determinante. Vamos a deducirla:

$$S = \frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{AH} \qquad [1]$$

La ecuación de la recta de $\overline{BC}$ es

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \Rightarrow (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + (x_2y_3 - y_2x_3) = 0 \qquad [2]$$

Se puede comprobar, desarrollando, que una forma muy cómoda de esa misma recta es:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad [3]$$

Teniendo en cuenta las formas [2] y [3] de esa recta, la distancia del punto $A(x_1, y_1)$ a la recta de $\overline{BC}$ vale

$$\overline{AH} = \frac{1}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad [4]$$

De otro lado, $$|\overline{BC}| = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \qquad [5]$$

Sustituyendo [4] y [5] en [1], se obtiene la sencilla expresión

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

4.3. AREA DE UN POLIGONO CONVEXO

Sea el polígono convexo representado en la figura 4.3. Vamos a calcular las áreas

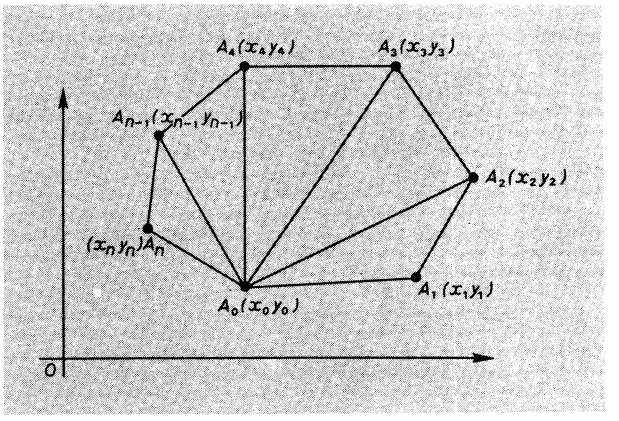


Fig. 4.3

de los triángulos $A_0A_1A_2$, $A_0A_2A_3$, $A_0A_3A_4$, ..., $A_0A_{n-1}A_n$, cuya reunión es el polígono dado:

$$2\,S_{\widehat{A_0A_1A_2}}=\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_0 & y_0\end{vmatrix}}_{\text{(desarrollo por elementos de la columna 3)}}=$$

$$=(x_0y_1-x_1y_0)+(x_1y_2-x_2y_1)+\boxed{(x_2y_0-x_0y_2)}$$

$$2\,S_{\widehat{A_0A_2A_3}}\ \begin{vmatrix}x_0 & y_0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\boxed{(x_0y_2-x_2y_0)}+(x_2y_3-x_3y_2)+\boxed{(x_3y_0-x_0y_3)}$$

$$2\,S_{\widehat{A_0A_3A_4}}=\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ x_4 & y_4 & 1\end{vmatrix}=\boxed{(x_0y_3-x_3y_0)}+(x_3y_4-x_4y_3)+\boxed{(x_4y_0-x_0y_4)}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$2\,S_{\widehat{A_0A_{n-1}A_n}}=\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & 1\\ x_{n-1} & y_{n-1} & 1\\ x_n & y_n & 1\end{vmatrix}=\boxed{(x_0y_{n-1}-x_{n-1}y_0)}+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})+(x_ny_0-x_0y_n)$$

El área del polígono $A_0A_1A_2 \ldots A_n$ es la suma de las áreas de los triángulos anteriores; y como los términos recuadrados se anulan, resulta:

$$2S = (x_0y_1 - x_1y_0) + (x_1y_2 - x_2y_1) + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_0 - x_0y_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1}y_i - x_iy_{i-1}) + (x_ny_0 - x_0y_n)$$

Ahora bien: el polígono considerado tiene $n + 1$ lados; para que tenga n lados, basta con que $x_0 = x_n$, $y_0 = y_n$, en cuyo caso queda:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1}y_i - x_iy_{i-1})$$

Ejercicio

Hállese, aplicando la fórmula anterior, el área encerrada por el pentágono $A_0(1, 1)$, $A_1(4, 2)$, $A_2(7, 4)$, $A_3(4, 5)$, $A_4(2, 3)$.

Es conveniente siempre dibujar el polígono para asegurarse de que es convexo y, por tanto, que la aplicación de la fórmula deducida es correcta.

Si el área saliese con signo negativo, se toma en valor absoluto, toda vez que un signo u otro depende del sentido de recorrido del perímetro.

4.4. AREA DE LA PROYECCION DE UN POLIGONO SOBRE UN PLANO

Consideremos primero el caso del triángulo. Si el triángulo tiene un lado paralelo al plano sobre el cual se proyecta (Fig. 4.4), el área de la proyección se obtiene multiplicando el área del triángulo por el coseno del ángulo que forman ambos planos

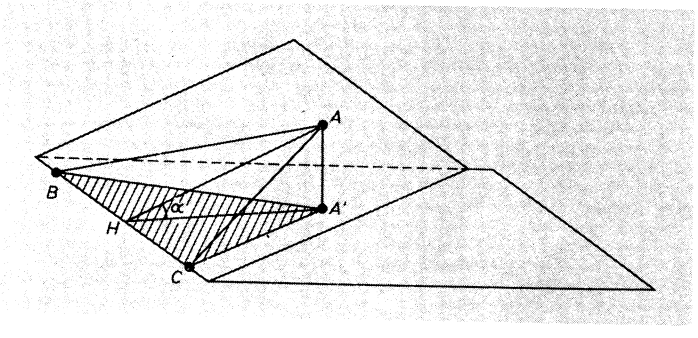


Fig. 4.4

$\overline{AH} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{A'H} \perp \overline{BC}$, por el teorema de «las tres perpendiculares»

$$S_{\widehat{A'BC}} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{A'H} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AH} \cdot \cos \alpha = S_{\widehat{ABC}} \cos \alpha$$

Si el triángulo no tiene ningún lado paralelo al plano sobre el que se proyecta, también se sigue verificando la relación anterior. En efecto, en la figura 4.5, el área del triángulo $A'BC'$ es la diferencia de las áreas $A'BM$ y $C'BM$, triángulos a los que es aplicable la conclusión anterior:

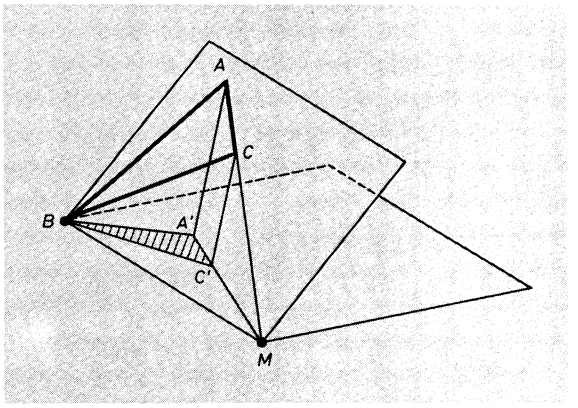


Fig. 4.5

$$S_{\widehat{A'BC'}} = S_{\widehat{A'BM}} - S_{\widehat{C'BM}} = S_{\widehat{ABM}} \cos \alpha - S_{\widehat{CBM}} \cos \alpha =$$
$$= (S_{\widehat{ABM}} - S_{\widehat{CBM}}) \cos \alpha = S_{\widehat{ABC}} \cos \alpha$$

Si en lugar de un triángulo se considera un polígono cualquiera, incluso cóncavo, se sigue verificando la misma relación (Fig. 4.6), pues basta con descomponer el polígono en tres triángulos:

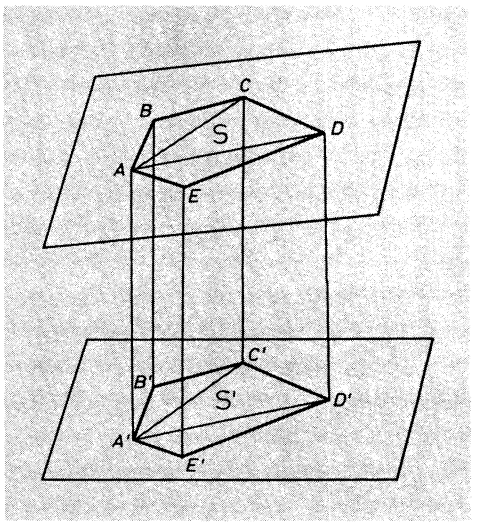


Fig. 4.6

$$\left.\begin{aligned} S_{A'B'C'} &= S_{ABC}\cos\alpha \\ S_{A'C'D'} &= S_{ACD}\cos\alpha \\ S_{A'D'E'} &= S_{ADE}\cos\alpha \end{aligned}\right\} +$$
$$S' = (S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE})\cos\alpha = S\cdot\cos\alpha$$

Es más; esta relación se verifica para una curva cerrada cualquiera. Este, por ejemplo, es uno de los métodos de deducción del área de la elipse a partir de la del círculo (Fig. 4.7).

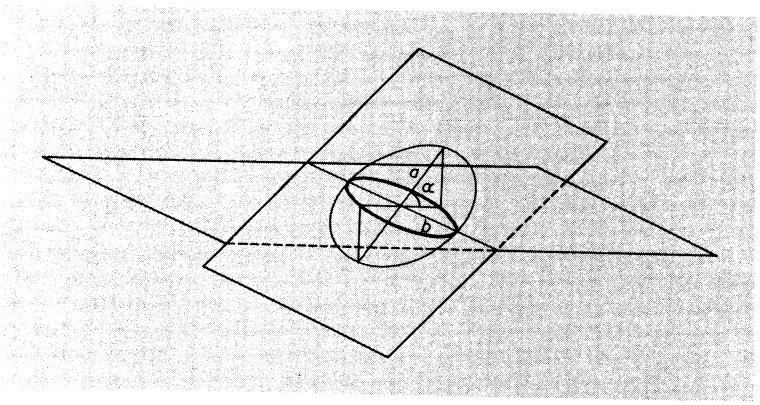


Fig. 4.7

$$S_{\text{circ.}} = \pi a^2 \quad ; \quad S_{\text{elipse}} = \pi a^2\cos\alpha = \pi\cdot a^2\cdot\frac{b}{a} = \pi ab$$

4.5. AREA DE UN POLIGONO EN EL ESPACIO EUCLIDEO

Recordemos que el ángulo de dos planos

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

es el ángulo que forman sus vectores normales, $\bar{n} = (A, B, C)$ y $\bar{n} = (A', B', C')$; o sea:

$$\cos\alpha = \frac{\bar{n}\cdot\bar{n}'}{|\bar{n}|\cdot|\bar{n}'|} = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Como consecuencia, el ángulo que forma un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ con el plano coordenado, $z = 0$, será:

$$\cos \alpha = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Dado un polígono cualquiera en el espacio (Fig. 4.8), $A_0(x_0 y_0 z_0)$, $A_1(x_1 y_1 z_1)$, . . . , $A_{n-1}(x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1})$, contenido en el plano $Ax + By + Cz + D = 0$, su área vendrá definida, según el apartado 4, por

$$S = \frac{S'}{\cos \alpha} = \frac{S' \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{C}$$

donde S' es el área de su proyección sobre el plano xy, es decir, el área del polígono de proyección $A'_0(x_0 y_0)$, $A'_1(x_1 y_1)$, . . . $A'_{n-1}(x_{n-1} y_{n-1})$.

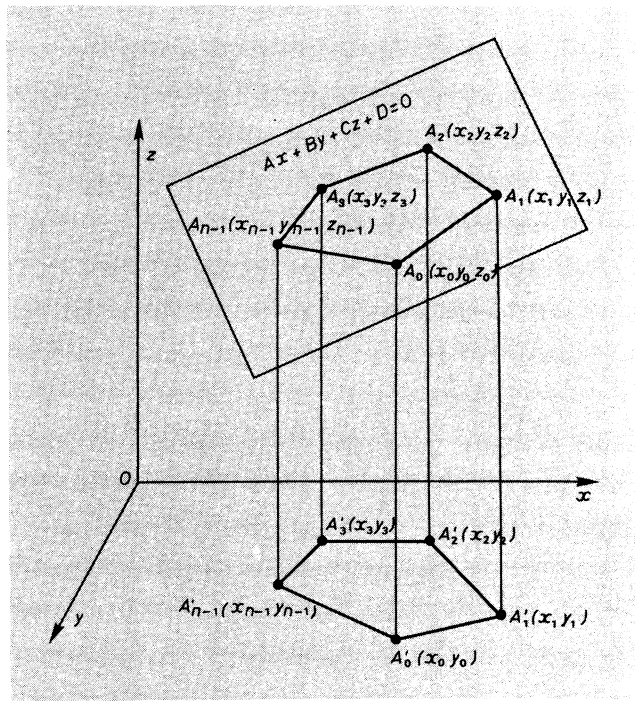


Fig. 4.8

Puesto que el área de un polígono en el plano euclídeo ya se sabe calcular, se ha resuelto el problema en el caso general.

4.6. VOLUMENES DE POLIEDROS. CONCEPTOS

En el capítulo sobre integral definida ya se hace referencia a que en el plano el elemento básico para el cálculo de áreas de polígonos es el triángulo; pero el área de un triángulo se obtiene como la mitad del área de un paralelogramo, construido sobre dos de sus lados. El área de un paralelogramo es igual a la del rec-

tángulo de igual base y altura. En Geometría se justifica que la medida del área de un rectángulo, tomando como unidad el cuadrado unitario, es el producto de la longitud de la base por la longitud de la altura.

Si se pasa al espacio, el elemento básico es el tetraedro, cuyo volumen se deduce del volumen del paralelepípedo y éste, a su vez, del volumen del ortoedro. Un ortoedro se transforma en paralelepípedo añadiendo y suprimiendo partes iguales, como se indica en la figura 4.9, y viceversa.

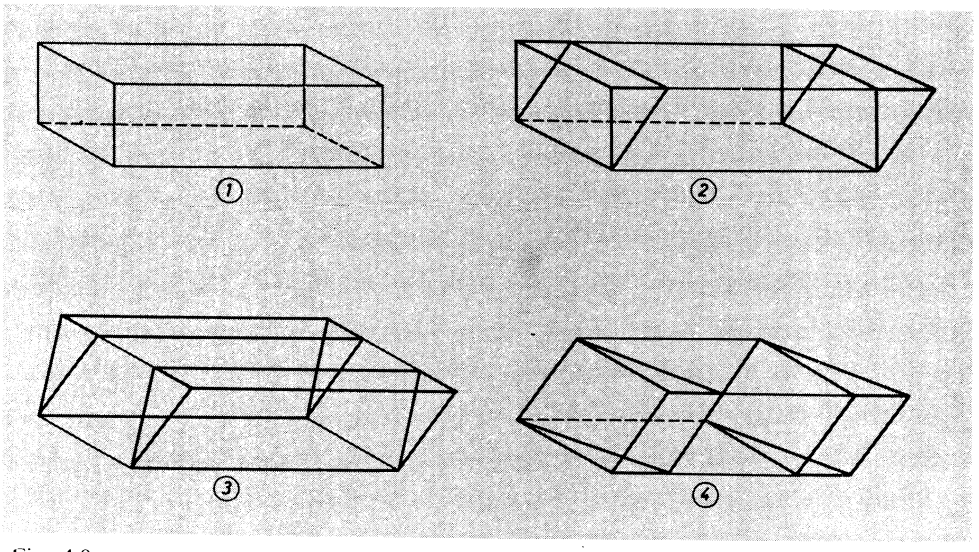


Fig. 4.9

En geometría elemental se justifica que el volumen del ortoedro, tomando como unidad el cubo unitario, se obtiene multiplicando las medidas de sus tres lados, o, lo que es igual, *la medida del área de la base por la altura.* Esto también es válido para el paralelepípedo, ya que puede transformarse en un ortoedro de iguales altura y área de base.

Un prisma triangular tendrá mitad de volumen del paralelepípedo construido sobre tres de sus aristas concurrentes (Fig. 4.10, *a*) y, por tanto, su volumen valdrá

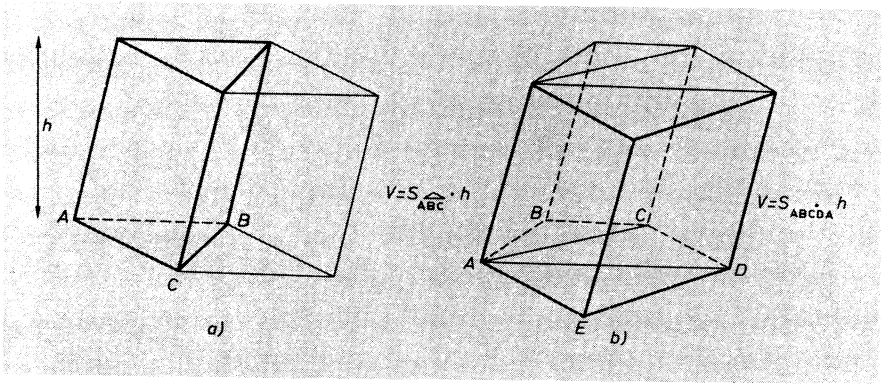


Fig. 4.10

también el área de la base por la altura. Un prisma poligonal cualquiera se descompone (Fig. 4.10, *b*) en prismas triangulares de igual altura y su volumen resulta, asimismo, de multiplicar el área de la base (suma de las áreas triangulares) por la altura.

El volumen de un tetraedro es un tercio del área de la base por la altura, ya que es un tercio del volumen del prisma triangular de iguales base y altura (Fig. 4.11). Por tanto, resultará un sexto del volumen del paralelepípedo construido sobre tres de sus aristas concurrentes.

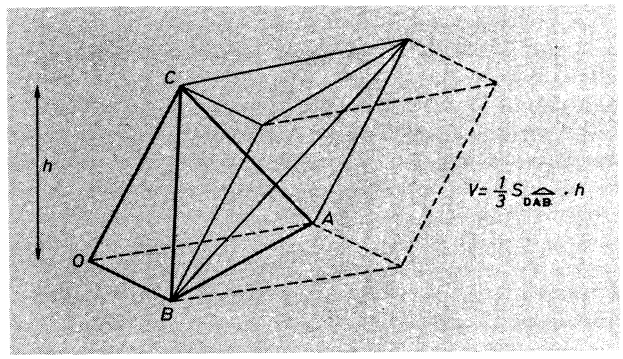


Fig. 4.11

Puesto que una pirámide cualquiera se descompone en tetraedros (pirámides de base triangular) de igual altura (Fig. 4.12), también su volumen es un tercio del área de la base por la altura.

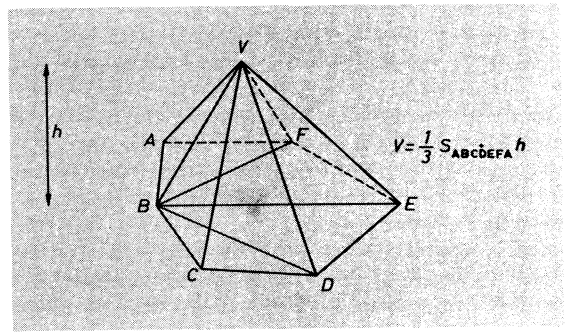


Fig. 4.12

No sólo los prismas y pirámides se descomponen en tetraedros, sino cualquier poliedro. Entonces, su volumen será la suma de los volúmenes de los tetraedros que lo componen. Se demuestra que este volumen es único, cualquiera que sea la descomposición.

4.7. EXPRESION ANALITICA DE LOS VOLUMENES DEL PARALELEPIPEDO Y DEL TETRAEDRO

Al estudiar el producto escalar y vectorial se demuestra que el producto mixto $\bar{a} \cdot (\bar{b} \wedge \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ tiene como interpretación geométrica el volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ (Fig. 4.13, *a*)

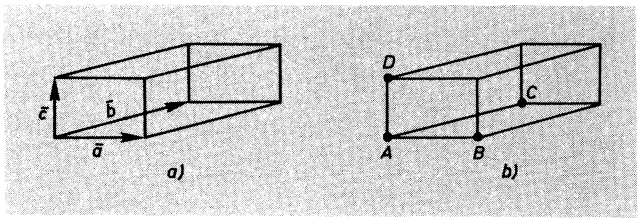


Fig. 4.13

Si se pide el volumen del paralelepípedo definido por los puntos $A(x_A y_A z_A)$, $B(x_B y_B z_B)$, $C(x_C y_C z_C)$ y $D(x_D y_D z_D)$, se obtiene inmediatamente (Fig. 4.13, *b*):

$$\text{Volumen} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{vmatrix}$$

Si se pide el volumen del tetraedro, sería $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

4.8. VOLUMENES DE POLIEDROS. CALCULO

El volumen de cualquier poliedro se calcula descomponiendo en tetraedros y sumando los volúmenes de éstos.

Si se trata de poliedros sencillos, tales como prismas y pirámides, no se debe recurrir a esta descomposición, sino usar directamente las fórmulas que dan los volúmenes de esos cuerpos, hallando los elementos que en ellos intervienen, como se aclara en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Calcúlese el volumen de la pirámide de base $ABCDE$ y vértice opuesto a la base, V, tales que $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(3, 1, 2)$, $D(4, 2, 2)$, $E(2, 2, 0)$ y $V(0, 0, 5)$.

— Ecuación del plano que contiene al polígono:

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 - 0 & 0 - 0 & 1 - 0 \\ 2 - 0 & 2 - 0 & 0 - 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{o sea:} \quad x - y - z = 0$$

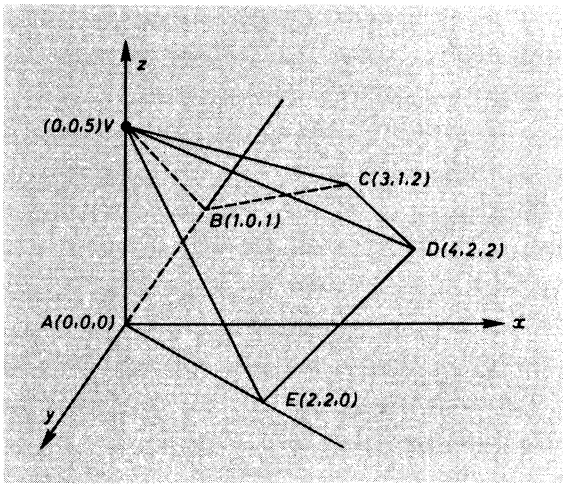


Fig. 4.14

— Angulo de los planos $\left.\begin{matrix} x - y - z = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$; $\cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

— Area del polígono proyección sobre el plano $z = 0$

$$\begin{matrix} A'(0,\ 0) & B'(1,\ 0) & C'(3,\ 1) & D'(4,\ 2) & E'(2,\ 2) \\ (x_0, y_0) & (x_1, y_1) & (x_2, y_2) & (x_3, y_3) & (x_4, y_4) \end{matrix}$$

$$2S' = (x_0 y_1 - x_1 y_0) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + (x_4 y_0 - x_0 y_4) =$$
$$= (0-0) + (1.1 - 3.0) + (3.2 - 4.1) + (4.2 - 2.2) + (0-0) = 7$$

— Area del polígono $ABCDE$, base de la pirámide problema:

$$S = \frac{S'}{\cos \alpha} = \frac{7/2}{1/\sqrt{3}} = \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

— La altura de la pirámide es la distancia del punto $V(0, 0, 5)$ al plano $x - y - z = 0$:

$$h = \frac{|0 - 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = 5/\sqrt{3}$$

— Volumen

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2}\sqrt{3} \cdot 5/\sqrt{3} = 35/6$$

Ejemplo 2

Calcúlese el volumen del prisma de base el polígono $ABCD$ y de arista AM, tales que $A(0, 3, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(3, 2, 0)$, $D(2, 4, 0)$ y $M(4, 3, 5)$, representado en la figura 4,15.

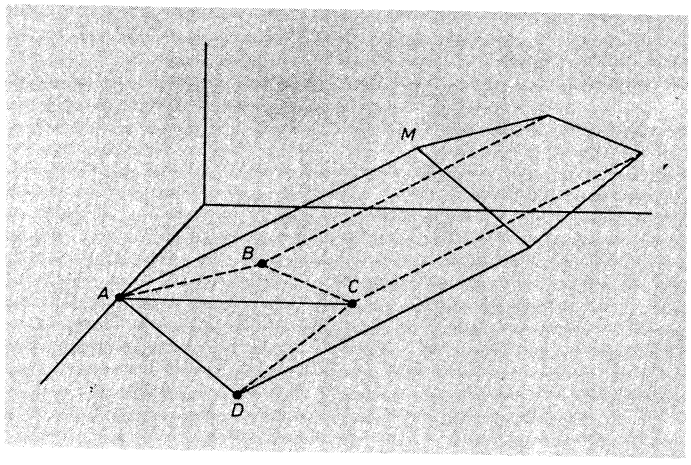


Fig. 4.15

— Area $ABCD = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (5 + 5) = 5$

— Altura

$$h = 5 \text{ (coordenada } z_M)$$

— Volumen

$$V = S_{ABCD} \cdot h = 5 \cdot 5 = 25$$

Ejercicio

Hállese el volumen del prisma una de cuyas bases es el polígono $ABCDE$ del primer ejemplo y la otra base está situada en el plano $x - y - z + 7 = 0$.

4.9. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. Calcúlese el área del triángulo $A(2, 3)$, $B(7, 1)$, $C(4, 0)$.
2. Hállese el área del polígono $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(4, 4)$, $D(3, 5)$, $E(1, 4)$.
3. Determínese en el espacio el área del triángulo $A(1, 2, 1)$, $B(3, 3, 2)$, $C(1, -1, 0)$.
4. Calcúlese el área del cuadrilátero del espacio $A(1, 1, 2)$, $B(2, 3, 5)$, $C(4, 4, 8)$, $D(3, 5, 8)$.
5. Hállese el volumen de la pirámide de vértice $V(1, 1, 7)$ y de base el polígono del problema anterior.
6. Hállese el volumen del prisma una de cuyas bases es el polígono del problema 3 y la otra base está en el plano $x + y - 3z + 4 = 0$.

7. Calcúlese el volumen del tetraedro de vértices $A(3, 2, 1)$, $B(1, 2, 4)$, $C(4, 0, 3)$, $D(1, 1, 7)$.

8. Determínese el volumen del paralelepípedo construido sobre $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$.

9. Calcúlese el volumen del tetraedro $A(1, 2, 0)$, $B(3, 4, 1)$, $C(2, 3, 2)$, $D(4, 2, 5)$.

10. El cilindro de revolución de radio 5 y eje el eje z es cortado por el plano $x - y + 2z + 5 = 0$. Calcúlese el área de la sección.

5

Geometría de las congruencias y de las semejanzas

5.1. INTRODUCCION

Partiendo de hechos concretos experimentables físicamente, se pretende llegar en este capítulo al concepto matemático de congruencias y semejanzas, como transformaciones en un espacio euclídeo de cualquier dimensión, y no sólo bi o tridimensional.

Así se pondrán de acuerdo los conceptos que se estudian en la enseñanza elemental con los que corresponden a este nivel, en que ya es posible captar hasta un punto razonable el método y la unidad que proporcionan el formalismo abstracto.

Se ha optado por efectuar las demostraciones en el caso bidimensional, puesto que moverse en el fárrago de operaciones que exige el tratamiento n-dimensional no parece instructivo y tal vez sólo condujera a oscurecer las ideas clave.

5.2. CONCEPTO ELEMENTAL DE CONGRUENCIA

En la geometría plana elemental se dice que dos figuras son *iguales* o *congruentes* cuando superponiéndolas materializadas con alambre flexible (de cobre, por ejemplo), se las puede hacer coincidir. Los puntos de una y otra que coinciden en la superposición se denominan *homólogos*.

La característica esencial de dos figuras congruentes es que la distancia entre dos puntos cualesquiera de una figura es igual a la distancia entre sus homólogos en la otra.

La superposición puede efectuarse moviendo una de las figuras sin sacarla del plano (Fig. 5.1, *a*), hasta hacerla coincidir con la otra. Se trata entonces, de una *congruencia directa.*

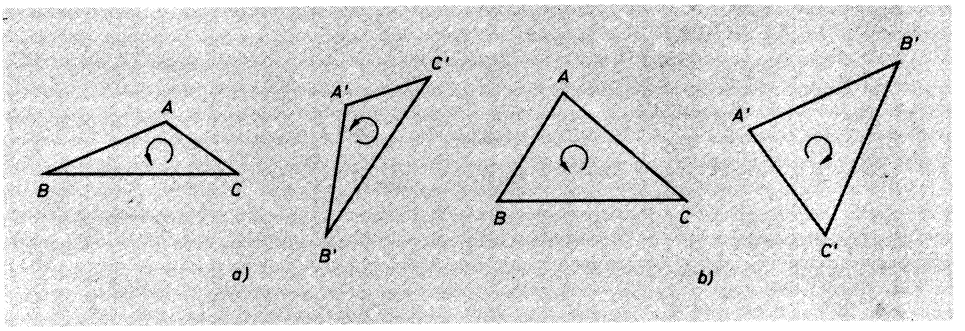


Fig. 5.1

A veces, como en la figura 5.1, *b*, para poderlas llevar a coincidir, se hace necesario sacar una de ellas del plano, en cuyo caso se denomina *congruencia inversa.*

El par de figuras congruentes directas de la figura 5.1, *a*, tienen la misma orientación, al recorrer los vértices de una y otra, orientación representada por el sentido de giro de la flecha circular, mientras que el par de figuras congruentes inversas de la figura 5,1, *b*, tienen orientaciones contrarias.

Obsérvese que «sacar la figura del plano y volverla a él» equivale a cambiar su orientación, y esto también se consigue sustituyendo una figura por su simétrica, respecto de una recta. Téngase esta idea presente en el apartado siguiente.

5.3. LA CONGRUENCIA COMO TRANSFORMACION

Una transformación geométrica plana es una aplicación del plano sobre sí mismo.

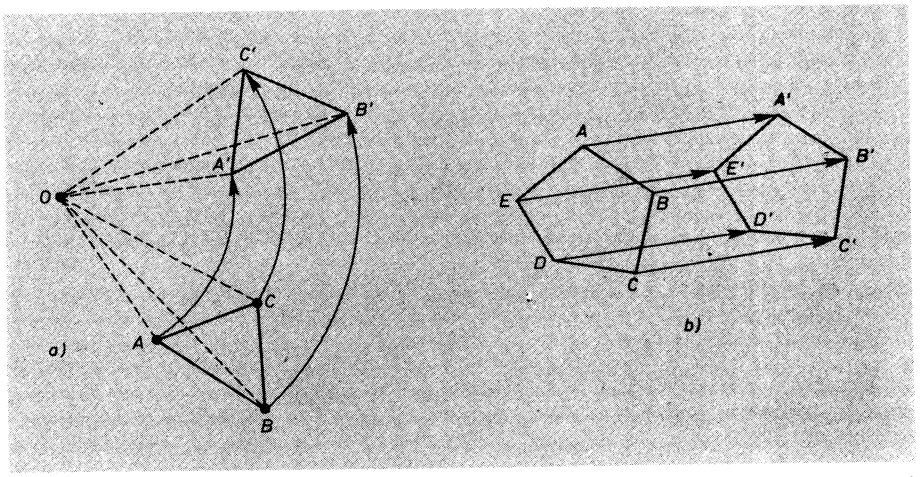


Fig. 5.2

En una transformación geométrica se denominan puntos y figuras *homólogos* los que se corresponden en la transformación.

Una transformación se denomina de congruencia directa (inversa), si las figuras homólogas son congruentes directas (inversas), según el criterio intuitivo expresado en el apartado anterior.

En Cinemática se entiende que dos figuras son congruentes directas si se pueden llevar a coincidir mediante un giro (Fig. 5.2, *a*) o mediante una traslación (Fig. 5.2, *b*), o mediante una combinación de ambas, que en último término se reduce a una de ellas.

Esta es la razón por la que a las congruencias se las suele llamar también *movimientos*.

El giro y la traslación son transformaciones de congruencia directa, y cualquier transformación de congruencia directa se reduce a una de ellas.

De otro lado, una figura y su simétrica con relación a una recta (Fig. 5.3) son

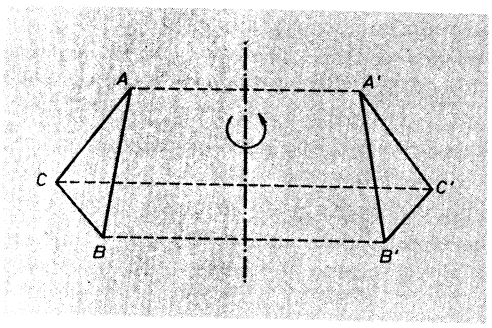


Fig. 5.3

congruentes inversas, y pueden llegar a coincidir mediante un giro, alrededor de una recta, pero «sacando una de ellas del plano».

Puesto que la simetría cambia la orientación de las figuras, se concluye que una congruencia inversa es el producto de una simetría por una congruencia directa.

Aparece ahora una pregunta: ¿Las traslaciones, giros y simetrías son las únicas transformaciones de congruencia del plano? La respuesta es afirmativa, pero su justificación exige un tratamiento estrictamente matemático, y no intuitivo.

5.4. ECUACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES DE TRASLACION Y ROTACION

5.4.1. Traslación

De cursos anteriores se conocen las ecuaciones de traslación en el plano, que se recuerdan sobre la figura 5.4:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 + a \\ x_2' &= x_2 + b \end{aligned}\right\} T$$

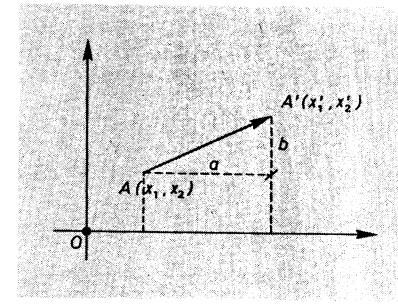


Fig. 5.4

5.4.2. Giro

Sobre la figura 5.5 se recuerdan las ecuaciones del giro en el plano, de ángulo α y centro 0 (0, 0):

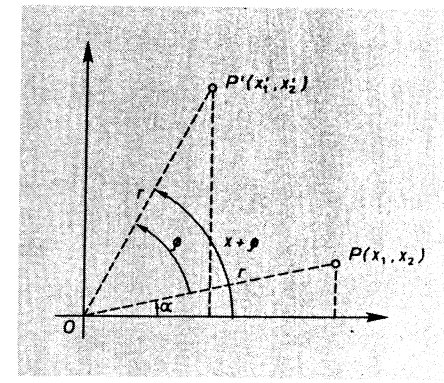


Fig. 5.5

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= x_1/r \\ \operatorname{sen} \alpha &= x_2/r \end{aligned} \qquad [1]$$

Las coordenadas del punto girado PP' son:

$$\begin{aligned} x_1' &= \overline{OP'} \cdot \cos(\alpha + \varphi) \\ x_2' &= \overline{OP'} \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \varphi) \end{aligned}$$

o, lo que es igual:

$$\begin{aligned} x_1' &= r \cdot \cos(\alpha + \varphi) = r \cdot (\cos \alpha \cos \varphi - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi) \\ x_2' &= r \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \varphi) = r \cdot (\operatorname{sen} \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \cos \varphi) \end{aligned} \qquad [2]$$

Sustituyendo las igualdades [1] en las [2] y simplificando, resulta:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos \varphi - x_2 \operatorname{sen} \varphi \\ x_2' &= x_1 \operatorname{sen} \varphi + x_2 \cos \varphi \end{aligned}\right\} G \qquad [3]$$

que son las ecuaciones de centro en el origen y de amplitud φ.

5.4.3. Transformación compuesta de giro y traslación, $T \times G$

$$A \xrightarrow{G} A'' \xrightarrow{T} A'$$

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{G} (x_1'', x_2'') \xrightarrow{T} (x_1', x_2')$$

Aplicando las ecuaciones del giro y, sobre ellas, las de la traslación, resulta:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\varphi - x_2 \operatorname{sen}\varphi + a \\ x_2' &= x_1 \operatorname{sen}\varphi + x_2 \cos\varphi + b \end{aligned}\right\} T \times G \qquad [4]$$

Si se hace $a_{11} = \cos\varphi$, $a_{12} = -\operatorname{sen}\varphi$, $a_{21} = \operatorname{sen}\varphi$, $a_{22} = \cos\varphi$, resultará:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b \end{aligned}\right. \qquad [5]$$

donde los coeficientes verifican la relación

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= 1 \\ a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad [6]$$

5.5. ECUACIONES DE LA TRANSFORMACION DE SIMETRIA

Las ecuaciones de la transformación de simetría respecto del eje x_1 se recuerdan junto a la figura 5.6.

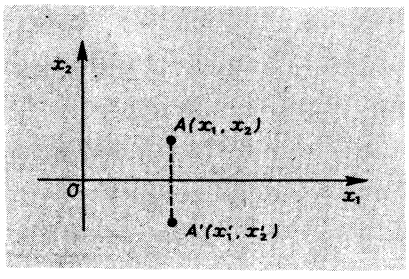


Fig. 5.6

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 \end{aligned}\right\} S \qquad [7]$$

Para establecer las ecuaciones de la simetría respecto de una recta que forma un ángulo φ con el eje x_1 (Fig. 5.7), ha de realizarse un giro de ejes, con lo que el problema queda reducido al caso anterior.

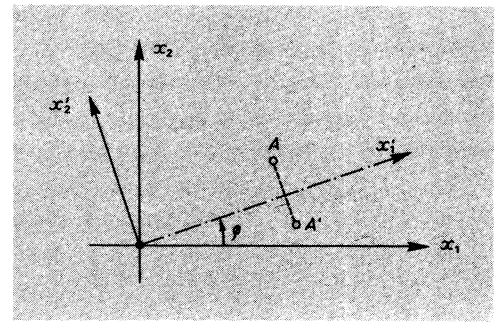


Fig. 5.7

Ejercicio

Compruébese que las ecuaciones de la simetría representada en la figura 5.7, son:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos 2\varphi + x_2 \operatorname{sen} 2\varphi \\ x_2' &= x_1 \operatorname{sen} 2\varphi - x_2 \cos 2\varphi \end{aligned}} \qquad [8]$$

Como un giro de ejes de ángulo φ, alrededor del origen, equivale a un giro de centro 0 y amplitud $-\varphi$, puede realizarse el ejercicio propuesto, siguiendo el esquema

$$A \xrightarrow{G(-\varphi)} A'' \xrightarrow{S} A''' \xrightarrow{G(\varphi)} A'$$

Esta transformación de simetría se podría componer ahora con una traslación. Pero para nuestro objeto no es necesario, pues lo que interesa es que si se hace $a_{11} = \cos 2\varphi$, $a_{12} = \operatorname{sen} 2\varphi$, $a_{21} = \operatorname{sen} 2\varphi$, $a_{22} = -\cos 2\varphi$, resultan las mismas relaciones de la traslación y rotación que se escribieron en [6].

5.6. AFINIDADES

En el plano euclídeo (o en el plano afín general) se llama transformación afín, o *afinidad*, a la representada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2 + c \\ x_2' &= dx_1 + ex_2 + f \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0 \qquad [9]$$

Se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Veamos que el producto de dos afinidades es otra afinidad:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{vmatrix} \neq 0$$

Sustituyendo la segunda en la primera, queda:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \varphi \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \left[\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \right]$$

Y basta comprobar que la matriz de los coeficientes de x_1, x_2 es regular, para terminar la demostración. En efecto:

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \end{vmatrix} \neq 0$$

Se ha utilizado la llamada fórmula de Binet-Cauchy, que dice que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas.

Las afinidades forman grupo. En efecto:

1. *Asociatividad*

   Se verifica para la composición de todo tipo de transformaciones.

2. *Elemento unidad*

   La identidad es una afinidad en la que $a = e = 1, b = c = d = f = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_1. \\ x_2' = x_2 \end{cases}$

3. *Elemento inverso*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -c \\ -f \end{pmatrix}$$

que es una afinidad, pues

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}^{-1} \right| = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}^{-1} \neq 0$$

Se dice que la figura F es afín de F' cuando existe una afinidad que transforma F en F'. La *relación afín* es una relación de equivalencia. En efecto:

1. *Reflexividad*

   F afín F, por ser afinidad la transformación idéntica.

2. *Simetría*

F afín $F' \Rightarrow F'$ afín F.

Se ha de demostrar que si existe una afinidad que transforma F en F', existe otra que transforma F' en F, lo cual es inmediato, ya que existe la afinidad inversa de la primera, por ser el conjunto de las afinidades un grupo.

3. *Transitividad*

F afín F' y F' afín $F'' \Rightarrow$ afín F''.

La propiedad es evidente, ya que el producto de dos afinidades es otra afinidad, según quedó demostrado anteriormente.

Se denominan *propiedades afines* de una figura las que se conservan en la afinidad. Como ejemplo de propiedad afín puede citarse el paralelismo de rectas. Sea el par

$$\left.\begin{aligned} Ax_1' + Bx_2' + C = 0 \\ A'x_1' + B'x_2' + C' = 0 \end{aligned}\right\} \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

Mediante la transformación afín

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2 + c \\ x_2' &= dx_1 + ex_2 + f \end{aligned}\right\}$$

se transforman en el par de rectas

$$\begin{aligned} A(ax_1 + bx_2 + c) + B(dx_1 + ex_2 + f) + C = 0 \\ A'(ax_1 + bx_2 + c) + B'(dx_1 + ex_2 + f) + C' = 0 \end{aligned}$$

o sea:

$$\begin{aligned} (Aa + Bd)x_1 + (Ab + Be)x_2 + (Ac + Bf + C) = 0 \\ (A'a + B'd)x_1 + (A'b + B'e)x_2 + (A'c + B'f + C') = 0 \end{aligned}$$

que son paralelas, puesto que

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{Aa + Bd}{A'a + B'd} = \frac{Ab + Be}{A'b + B'e}$$

El objeto de la geometría afín es el estudio de las propiedades afines.

La *relación afín*, por ser de equivalencia, determina una clasificación de todas las figuras del plano. Desde el punto de vista de la geometría afín, dos figuras afines, o sea, que pertenecen a la misma clase afín, son indistinguibles, por tener las mismas propiedades afines. Así, por ejemplo, la elipse

$$\frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2} = 1$$

y la circunferencia

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

son indistinguibles, desde el punto de vista afín, pues la afinidad

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{a}{R} x_1 \\ x_2' = \dfrac{b}{R} x_2 \end{cases}$$

transforma una en la otra.

Todo lo que hasta aquí se ha expuesto sobre afinidad en el plano es generalizable al espacio tri y, en general, n-dimensional.

Ejercicio

Compruébese que los giros, traslaciones y simetrías son afinidades.

5.7. DEFINICION DE TRANSFORMACIONES DE CONGRUENCIA

Se denomina transformación de congruencia en el espacio euclídeo B_2 (en general, en E_n) a la transformación afín que conserva la distancia entre dos puntos cualesquiera, o, lo que es lo mismo, que conserva el módulo de cualquier vector.

Sea la transformación afín

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \alpha \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \beta \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

La transformación de vectores viene expresada por las mismas ecuaciones, prescindiendo de los términos independientes

$$\begin{aligned} X_1' &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \\ X_2' &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \end{aligned}$$

Si $\bar{v} = (X_1, X_2)$ y $\bar{v}' = (X_1, X_2')$, y se ha dicho que $|\bar{v}| = |v'|$, entonces,

$$\begin{aligned} X_1^2 + X_2^2 = X_1'^2 + X_2'^2 &= (a_{11}X_1 + a_{12}X_2)^2 + (a_{21}X_1 + a_{22}X_2)^2 = \\ &= (a_{11}^2 + a_{21}^2)\, X_1^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2)\, X_2^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})\, X_1X_2 \end{aligned}$$

Identificando coeficientes, puesto que se trata de una identidad y no de una ecuación, resulta:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases} \qquad [10]$$

Las tres expresiones anteriores pueden expresarse abreviadamente

$$a_{1k}a_{1h} + a_{2k}a_{2h} = \delta_{kh} \qquad (\delta \text{ Kronecker})$$
$$(k, h = 1, 2)$$

Estas relaciones constituyen la «condición necesaria y suficiente» para que la transformación afín sea congruencia.

¿Qué quieren decir en lenguaje matricial las relaciones anteriores? Quieren decir que el producto de la traspuesta por la matriz es igual a la matriz unidad:

$$A' \cdot A = I$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O sea:

$$\boxed{A' = A^{-1} \Leftrightarrow A = (A')^{-1}}$$

Lo que se acaba de escribir es la definición de matriz *ortogonal.* Por tanto, se puede enunciar: La condición necesaria y suficiente para que una transformación afín sea congruencia es que la matriz de los coeficientes sea ortogonal.

Las relaciones [10] entre los coeficientes permiten escribir la matriz de transformación en forma más sencilla:

$$a_{11}a_{12} = -a_{21}a_{22} \Rightarrow \frac{a_{11}}{a_{21}} = -\frac{a_{22}}{a_{12}} \Rightarrow \frac{a_{11}^2}{a_{21}^2} = \frac{a_{22}^2}{a_{12}^2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \Rightarrow 1 + \frac{a_{11}^2}{a_{21}^2} = \frac{1}{a_{21}^2} \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \Rightarrow 1 + \frac{a_{22}^2}{a_{12}^2} = \frac{1}{a_{12}^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{21}^2 = a_{12}^2 \qquad [11]$$

El cumplimiento de la igualdad [11] permite dos posibilidades:

1. $a_{12} = a_{21} \Rightarrow a_{11} = -a_{22}$. Con ello, y volviendo a la notación general usada en [9], la transformación es

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad -a^2 - b^2 = -1; \quad a^2 + b^2 = 1$$

2. $a_{12} = -a_{21} \Rightarrow a_{11} = a_{22}$. Entonces.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad a^2 + b^2 = 1$$

5.8. ORIENTACION EN EL PLANO AFIN

Introduciendo el concepto de modo intuitivo, obsérvese que el contorno de una figura cerrada puede recorrerse de las dos formas que se indican en la figura 5.8:

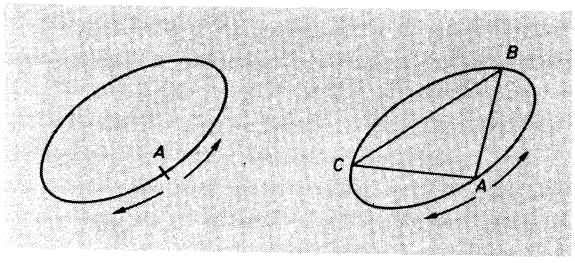


Fig. 5.8

El sentido del recorrido queda determinado por dos puntos intermedios, B, C, indicando en qué orden pueden «ocuparse» esos puntos: el orden ABC o el ACB. De esta manera se ha reducido el sentido de recorrido de cualquier figura al de un triángulo.

A su vez, el sentido de recorrido de un triángulo se reduce al sentido de giro de un par de vectores, como puede apreciarse en la figura 5.9:

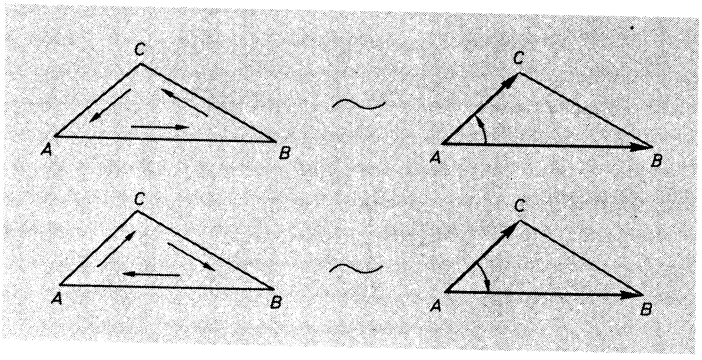


Fig. 5.9

Captada de un modo intuitivo la orientación en el plano, su tratamiento matemático es el que sigue:

Si $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ son los vértices de un triángulo, la orientación de ABC viene dada por el signo del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Es evidente que cambiar ABC por ACB equivale a cambiar entre sí dos columnas del determinante escrito, lo que cambia su signo.

El determinante anterior puede escribirse, restando la primera columna de las demás, así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}$$

que expresa la orientación definida por el par de vectores

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{AC} = (c_1 - a_1,\ c_2 - a_2)$$

Ejercicio 1

Demuéstrese que el signo relativo de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \\ 1 & r_1 & r_2 \end{vmatrix}$$

no depende del sistema de referencia. Sugerencia: si el cambio de referencia es

$$\begin{cases} x_1' = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \beta \\ x_2' = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \gamma \end{cases} \quad \text{ó} \quad (x_1'\ x_2') = (a_1\ a_2)\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} + (\alpha\ \beta),$$

obsérvese que

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1' & a_2' \\ 1 & b_1' & b_2' \\ 1 & c_1' & c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ 0 & \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

y análogamente para la otra terna. Aplíquese la fórmula de Binet-Cauchy.

Ejercicio 2

Demuéstrese que la orientación clasifica las ternas ordenadas de puntos.

5.9. CLASIFICACION DE LAS CONGRUENCIAS

En el apartado 5.7 se ha visto que pueden existir dos clases de congruencias:

1. $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, tal que $\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -a^2 - b^2 = -1$

Esta congruencia es la congruencia *inversa* y se caracteriza porque *cambia la orientación de las figuras*, como vamos a ver.

Siendo más cómodo el manejo de vectores, abordaremos el análisis vectorialmente.

$$\bar{v} = (v_1, v_2),\ \bar{w} = (w_1, w_2) \Rightarrow \bar{v}' = (v_1', v_2'),\ \bar{w}' = (w_1', w_2')$$

$$\begin{cases} v_1' = av_1 + bv_2 \\ v_2' = bv_1 - av_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1' = aw_1 + bw_2 \\ w_2' = bw_1 - aw_2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} v_1' & v_2' \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} av_1 + bv_2 & bv_1 - av_2 \\ aw_1 + bw_2 & bw_1 - aw_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} av_1 & \overset{0}{\overset{//}{bv_1}} \\ aw_1 & bw_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} av_1 & -av_2 \\ aw_1 & -aw_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} bv_2 & bv_1 \\ bw_2 & bw_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bv_2 & \overset{0}{\overset{//}{-av_2}} \\ bw_2 & -aw_2 \end{vmatrix} = -a^2 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(a_2 + b^2) \cdot \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

Puesto que $-(a^2 + b^2)$ es negativo, la orientación de $(\bar{v}', \bar{w}')$ es contraria a la de $(\bar{v}, \bar{w})$.

2. $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, tal que $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1$

Esta congruencia se denomina *directa*, porque *conserva la orientación de las figuras.*

La demostración sigue los mismos pasos que la anterior y es aconsejable realizarla como ejercicio.

El producto de dos congruencias es otra congruencia, por la propia definición de congruencia.

No tiene dificultad justificar que las congruencias forman grupo:

1. *Asociatividad*

   Se verifica para todas las transformaciones.

2. *Elemento unidad*

   Corresponde a la transformación idéntica.

3. *Elemento inverso*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, y, por las relaciones del apartado 7, se comprueba que es matriz ortogonal.

Ejercicio 1

Demuéstrese que las congruencias directas forman un subgrupo del grupo de las congruencias.

Ejercicio 2

Demuéstrese que las congruencias inversas no forman grupo.

5.10. CONGRUENCIAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Todo lo que se ha estudiado en el plano euclídeo es válido para el espacio euclídeo tridimensional y, en general, de cualquier dimensión.

Para que la transformación afín

$$\begin{array}{l} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \alpha \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \beta \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \gamma \end{array} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

sea una congruencia, la condición necesaria y suficiente es que la matriz de los coeficientes sea ortogonal, lo que equivale a establecer las condiciones

$$\begin{array}{ll} 1 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 & 0 = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} \\ 1 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 & 0 = a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} \\ 1 = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 & 0 = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} \end{array}$$

Las seis relaciones anteriores se escriben abreviadamente

$$a_{1k}a_{1h} + a_{2k}a_{2h} + a_{3k}a_{3h} = \delta_{kh} \quad (\delta \text{ Kronecker})$$

Puesto que $A' \cdot A = I$, resultará:

$$|A' \cdot A| = |A'| \cdot |A| = |A|^2 = |I| = 1,$$

de donde se concluye

$$|A| = \pm 1$$

Si $|A| = +1$, la congruencia se llama *directa*, por las mismas razones que en el plano. Si $|A| = -1$, la congruencia es *inversa*, porque cambia la orientación.

La orientación en el espacio se define de manera análoga a como se hizo en el plano, pero para cuatro puntos o para tres vectores, mediante el signo de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & u_1 \\ v_2 & w_2 & u_2 \\ v_3 & w_3 & u_3 \end{vmatrix}$$

que vienen indicados en la figura 5.10:

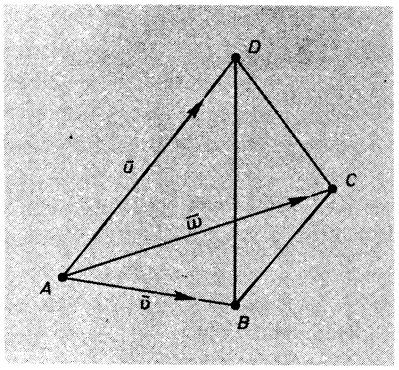


Fig. 5.10

Se demuestra análogamente la invarianza, respecto a los cambios de coordenadas y la clasificación de las cuaternas de puntos.

5.11. SEMEJANZA. IDEA ELEMENTAL

Dos figuras se dicen semejantes cuando una es reproducción de la otra a distinto tamaño (Fig. 5.11). Los puntos que se corresponden en la reproducción, tales como los (A, A'), (B, B'), (C, C'), se llaman homólogos, al igual que en el caso de las figuras congruentes.

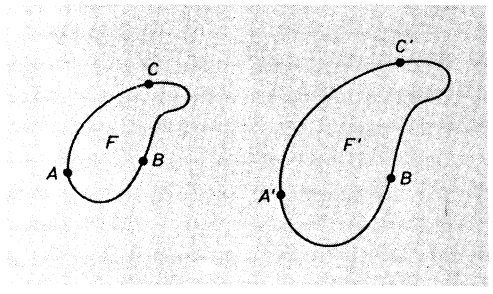


Fig. 5.11

En las figuras semejantes la relación de distancias entre un par de puntos y sus homólogos es constante:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \cdots = k \quad \text{(razón de semejanza)}$$

Así, por ejemplo, cuando un plano reproduce una casa a escala 1/20, sucede que 1 cm en el plano se corresponde con 20 cm en la casa. Ello significa que entre plano y casa hay una semejanza de razón 1/20.

En el estudio de la geometría elemental se dice que dos triángulos son seme-

jantes si tienen los lados proporcionales y se demuestra que esto equivale a afirmar que tienen los tres ángulos iguales (Fig. 5.12).

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$
$$\Updownarrow$$
$$\hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}',\ \hat{C} = \hat{C}'$$

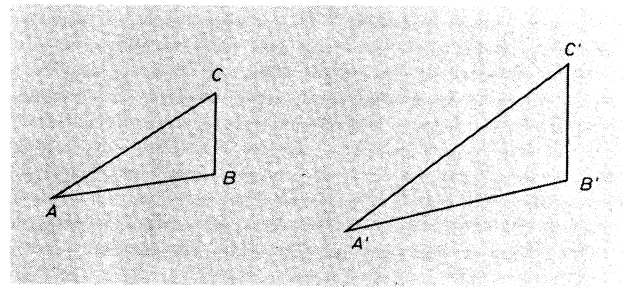


Fig. 5.12

Este hecho permite establecer la semejanza, diciendo que dos figuras son semejantes si ángulos determinados por puntos homólogos son iguales (Fig. 5.13), y,

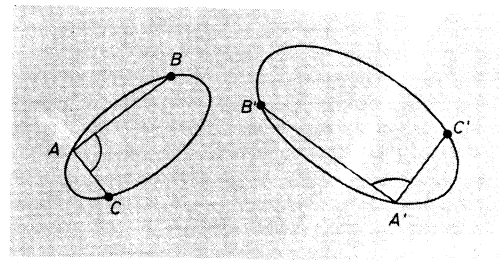


Fig. 5.13

como consecuencia, se deduce la proporcionalidad de segmentos que unen puntos homólogos.

Tras este breve recordatorio elemental de la semejanza, pasamos al tratamiento matemático de las transformaciones de semejanza.

5.12. TRANSFORMACIONES DE SEMEJANZA. CLASIFICACION

Una transformación afín se denomina transformación de *semejanza* si dos figuras homólogas cualesquiera son semejantes, según el criterio elemental expuesto anteriormente, lo que supone la conservación de ángulos. Entonces, una transformación de semejanza en el plano euclídeo (o en el espacio euclídeo n-dimensional) es una transformación afín que conserva los ángulos, aunque puede cambiar el sentido de los mismos.

Vamos a establecer las condiciones que han de verificar los coeficientes de la transformación afín para que ésta sea semejanza. Se trabajará en dimensión 2, teniendo presente que el mismo proceso es válido para dimensión cualquiera n.

Sea la transformación afín

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \alpha \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \beta \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

o bien, expresada para vectores,

$$\begin{aligned} X_1' &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \\ X_2' &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \end{aligned}$$

Han de hallarse las relaciones entre los coeficientes de la transformación, con la condición de que se conserven los ángulos. El desarrollo se hará en dos etapas y se comprobará que resultan unas relaciones muy parecidas a las de congruencia.

Primera etapa

Si la transformación conserva los ángulos, entonces los homólogos de dos vectores perpendiculares serán también perpendiculares. Es decir:

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = 0 \Rightarrow \bar{X}' \cdot \bar{Y}' = 0$$

o bien,

$$\begin{aligned} &X_1Y_1 + X_2Y_2 = 0 \Rightarrow X_1' \cdot Y_1' + X_2' \cdot Y_2' = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &(a_{11}X_1 + a_{12}X_2)(a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2) + (a_{21}X_1 + a_{22}X_2)(a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &[(a_{11}^2 + a_{21}^2)\,X_1 + (a_{12}a_{11} + a_{21}a_{22})\,X_2]\,Y_1 + [(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})\,X_1 + \\ &\quad + (a_{12}^2 + a_{22}^2)\,X_2]\,Y_2 = 0 \end{aligned}$$

Si se fija $\bar{X} = (X_1, X_2)$, las componentes de $\bar{Y}$ se obtendrán resolviendo el sistema homogéneo

$$\begin{cases} X_1Y_1 + X_2Y_2 = 0 \\ [(a_{11}^2 + a_{21}^2)\,X_1 + (a_{12}a_{11} + a_{21}a_{22})\,X_2]\,Y_1 + [(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})\,X_1 + \\ \qquad + (a_{12}^2 + a_{22}^2)\,X_2]\,Y_2 = 0 \end{cases} \qquad [12]$$

que evidentemente es compatible, pues siempre existen vectores perpendiculares a uno dado. Ello supone que los coeficientes han de ser proporcionales. O sea:

$$\begin{cases} (a_{11}^2 + a_{21}^2)\,X_1 + (a_{12}a_{11} + a_{21}a_{22})\,X_2 = k(\bar{X})\,X_1 \\ (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})\,X_1 + (a_{12}^2 + a_{22}^2)\,X_2 = k(\bar{X})\,X_2 \end{cases} \qquad [13]$$

Vamos a dar a $\bar{X}$ unos valores particulares que son los vectores

$$\bar{u}_1 = (1, 0) \quad \text{y} \quad \bar{u}_2 = (0, 1)$$

$$\bar{X} = \bar{u}_1 = (1, 0) \Rightarrow \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = k(\bar{u}_1) \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\bar{X} = \bar{u}_2 = (0, 1) \Rightarrow \begin{cases} a_{12}a_{11} + a_{21}a_{22} = 0 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = k(\bar{u}_2) \end{cases}$$

Por tanto, las [13] se reducen a

$$\begin{aligned} k(\bar{u}_1)\, X_1 &= k(\bar{X})\, X_1 \\ k(\bar{u}_2)\, X_2 &= k(\bar{X})\, X_2 \end{aligned}$$

Si se elige $\bar{X}$ de manera que $X_1 \neq 0$, $X_2 \neq 0$, resulta:

$$k(\bar{u}_1) = k(\bar{X}) = k(\bar{u}_2)$$

luego k es constante.

Segunda etapa

Si se verifican las relaciones

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= k \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= k \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0 \end{aligned}$$

entonces se conservan los ángulos (con o sin cambio de sentido), como vamos a ver.

Para justificar que se conservan los ángulos basta con demostrar que

$$\bar{X}' \cdot \bar{Y}' = k \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

pues, si esto es así, resulta, haciendo $\bar{X} = \bar{Y}$,

$$|\bar{X}'| = \sqrt{k}\,|\bar{X}| \quad \text{y} \quad |\bar{Y}'| = \sqrt{k}\,|\bar{Y}|$$

luego

$$\cos(\widehat{\bar{X}'\bar{Y}'}) = \frac{\bar{X}' \cdot \bar{Y}'}{|\bar{X}'| \cdot |\bar{Y}'|} = \frac{k \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sqrt{k}\,|\bar{X}|\,\sqrt{k}\,|\bar{Y}|} = \cos(\widehat{\bar{X}\,\bar{Y}})$$

Si los cosenos son iguales, los ángulos serán iguales u opuestos.

Demostremos, entonces, que $\bar{X}' \cdot \bar{Y} = k\,\bar{X} \cdot \bar{Y}$

$$\begin{aligned} \bar{X}' \cdot \bar{Y}' &= X_1'Y_1' + X_2'Y_2' = (a_{11}X_1 + a_{12}X_2)(a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2) + \\ &+ (a_{21}X_1 + a_{22}X_2)(a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2) = (\underbrace{a_{11}^2 + a_{21}^2}_{k})\, X_1Y_1 + (\underbrace{a_{12}^2 + a_{22}^2}_{k})\, X_2Y_2 + \\ &+ (\underbrace{a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}}_{0})\, X_1Y_2 + (\underbrace{a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21}}_{0})\, X_2Y_1 = k(X_1Y_1 + X_2Y_2) = \\ &= k\,\bar{X} \cdot \bar{Y}, \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

Consecuencia:

$$\frac{|\bar{X}'|}{|\bar{X}|} = \sqrt{k}$$

es decir, la relación de módulos de vectores homólogos es constante, y a esta constante se la denomina *razón de semejanza.*

La clasificación de las semejanzas es análoga a las de las congruencias:

$$A' \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \text{ matriz diagonal}$$

$|A' \cdot A| = |A|^2 = k^2$; luego puede ocurrir uno de los dos casos siguientes:

1. $|A| = +k$; se denomina *semejanza directa,* porque conserva las orientaciones de los ángulos y, en consecuencia, de las figuras;
2. $|A| = -k$; se llama *semejanza inversa,* porque cambia la orientación de ángulos y figuras.

La demostración reproduce la que se ha visto en el apartado 5.10, para congruencias. No obstante, no es necesario llegar al desarrollo, pues la semejanza se reduce a una situación de congruencia, como puede verse en el apartado que sigue.

5.13. HOMOTECIAS. DESCOMPOSICION DE SEMEJANZAS

La transformación de semejanza directa,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad [14]$$

se denomina *homotecia* directa, de centro en el origen y *razón de homotecia k* (Figura 5.14).

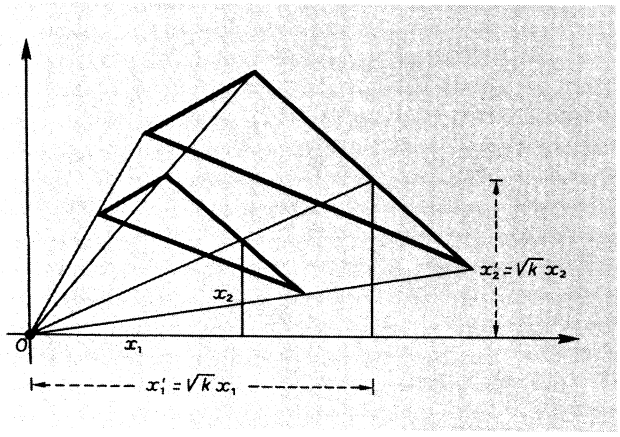


Fig. 5.14

En general,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad [15]$$

es la homotecia de centro (α, β), como puede ser là que se representa en la figura 5.15.

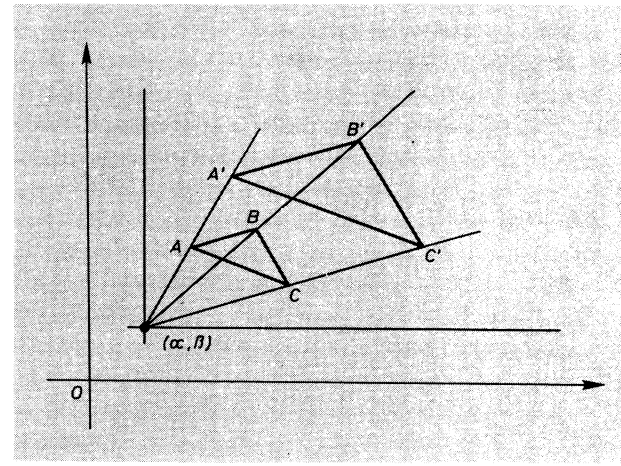


Fig. 5.15

La homotecia es una transformación de semejanza en la que cada par de puntos homólogos está alineado con un punto fijo, llamado *centro*, que es homólogo de sí mismo (= punto doble), y cualquier par de rectas homólogas son paralelas.

Si se sustituye en [14] y [15], $\sqrt{k}$ por $-\sqrt{k}$, resulta la homotecia inversa de razón $-\sqrt{k}$, pero tanto una como otra son semejanzas directas.

Ejercicio

Demuéstrese que la homotecia es semejanza directa.

Una transformación de semejanza, tal como

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 &= k \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 &= k \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0 \end{aligned}$$

puede escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\sqrt{k}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{k}} \\ \frac{a_{21}}{\sqrt{k}} & \frac{a_{22}}{\sqrt{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{k}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{k}} \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix}}_{\text{homotecia}} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\sqrt{k}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{k}} \\ \frac{a_{21}}{\sqrt{k}} & \frac{a_{22}}{\sqrt{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{k}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{k}} \end{pmatrix} \right]}_{\text{congruencia}}$$

Es decir, una semejanza es el producto de una homotecia por una congruencia. Resulta así que:

semejanza directa = congruencia directa × homotecia
semejanza inversa = congruencia inversa × homotecia.

5.14. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. Demuéstrese que la transformación $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{2} x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 + 5 \\ x_2' = \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - 6 \end{cases}$

es una congruencia inversa.

2. Estúdiese el tipo de transformación $\begin{cases} x_1' = x_1 + \sqrt{3}\, x_2 - 2 \\ x_2' = -\sqrt{3}\, x_1 + x_2 + 3 \end{cases}$

3. Demuéstrese que el producto de dos homotecias es una homotecia.

4. Demuéstrese que las semejanzas forman grupo y que las directas son subgrupo de éste.

5. Escríbanse las condiciones para que una transformación afín en E_3 sea semejanza.

6. Hállese el centro y la razón de la homotecia $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 5 \\ x_2' = 3x_2 + 4. \end{cases}$

7. Calcúlese la razón de la semejanza $\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 2x_2 + 3 \\ x_2' = -2x_1 + 5x_2 + 6. \end{cases}$

Luego descompóngase en producto de homotecia y congruencia.

8. Clasifíquense las siguientes transformaciones:

(1) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 4x_2 - 1 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + 4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1' = x_1 + 5 \\ x_2' = x_2 - 7 \end{cases}$

$$(3)\begin{cases} x_1' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 3 \\ x_2' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 - 5 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4 \\ x_2' = 3x_2 - 1 \\ x_3' = 3x_3 + 8 \end{cases}$$

9. Represéntense en diagramas de Venn las afinidades, semejanzas y congruencias.

10. Explíquese el objeto de la geometría de la congruencia (o igualdad), así como el de la geometría equiforme o de la semejanza. Sugerencia: léase con cuidado el apartado 5.6, especialmente su parte final.

6

Aproximación lineal. Derivada y diferencial

6.1. APROXIMACION DE UNA FUNCION POR OTRA EN UN PUNTO

Considérese una función $y = f(x)$. Supóngase que existe otra función $y = g(x)$, que coincide con la anterior en el punto $x = a$, es decir: $f(a) = g(a)$.

Se pretende estudiar el grado de aproximación o de ajuste de la función $y = g(x)$ a la función $y = f(x)$ en las proximidades del punto $x = a$.

Consideremos un punto próximo al $x = a$ que será el $a + \Delta x$.

La aproximación o ajuste será tanto mayor cuanto menor sea $|\overline{PQ}| = f(a + \Delta x) - g(a + \Delta x)$.

Ahora bien: $|\overline{PQ}|$ es una función de Δx que es infinitesimal en el punto $\Delta x = 0$, es decir, que $\lim_{\Delta x \to 0} |\overline{PQ}| = 0$ (véase figura 6.1).

Para tener una medida del ajuste o aproximación se compara el infinitésimo $|\overline{PQ}| = f(a + \Delta x) - g(a + \Delta x)$ con los infinitésimos (Δx), $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$, ..., es decir, se determina el orden de $|PQ|$.

Si $|\overline{PQ}|$ es un infinitésimo de orden $(n + 1)$, o sea, si $|\overline{PQ}|$ es del mismo orden que $(\Delta x)^{n+1}$ se dice que *el ajuste o aproximación es de orden n*.

Se concreta:

($y = g(x)$ tiene un ajuste o aproximación de orden n a $y = f(x)$ en el punto $x = a$) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - g(a + \Delta x)}{(\Delta x)^{n+1}} = c \neq 0 \right)$$

Cuanto mayor sea el orden de ajuste o aproximación más próximas estarán las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, para un mismo Δx suficientemente pequeño.

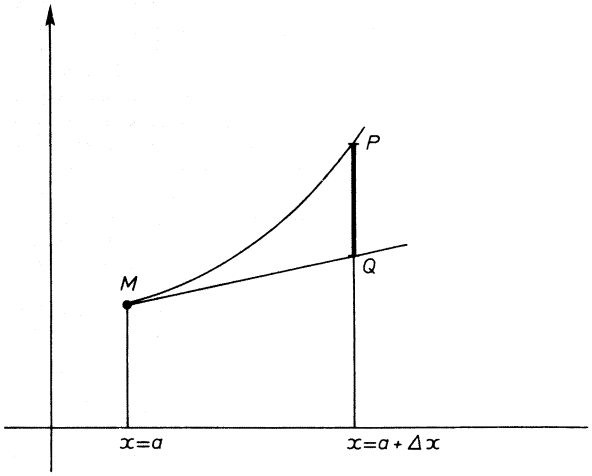


Fig. 6.1

6.2. APROXIMACION LINEAL DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Supongamos ahora que se pretende aproximar la función por medio de una recta. (Fig. 6.2.) Sea la función $y = f(x)$ en $x = a$.

Si consideramos una recta del haz de vértice $M(a, f(a))$:

$$y - f(a) = m(x - a) = m\,\Delta x$$

es decir, $y = f(a) + m\,\Delta x$, se tendrá $|\overline{PQ}| = f(a + \Delta x) - f(a) - m\,\Delta x$.

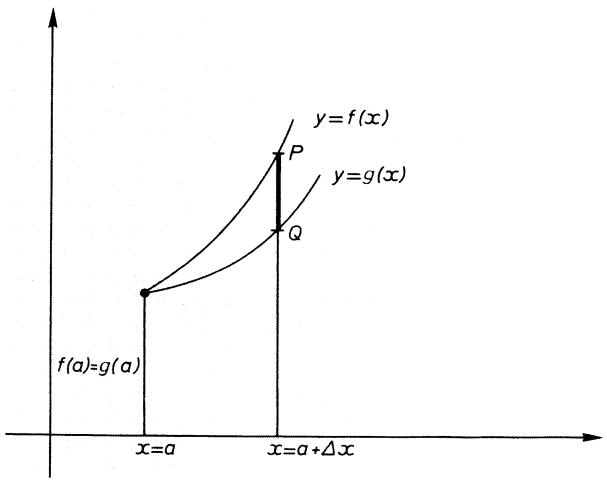


Fig. 6.2

Ha de determinarse el parámetro m con la condición de que el ajuste sea del mayor orden posible. Basta con que $|\overline{PQ}|$ sea de orden superior a Δx, para lo cual ha de verificarse

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\overline{PQ}|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a) - m\,\Delta x}{\Delta x} = 0$$

o sea

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Este valor de m es la pendiente de la recta que pasa por el punto $M(a, f(a))$, y que más se ajusta o aproxima a la curva $y = f(x)$. A m se le llama *derivada* de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$.

La recta en cuestión se llama *tangente* a la curva en $x = a$.

6.3. DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

La derivada de una función en un punto $x = a$ es un número real que representamos por $f'(a)$, si la función es $y = f(x)$, y que según se ha definido es

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

La derivada es la pendiente de la recta que más se ajusta en el punto, a la que hemos llamado tangente. Cualquier recta que pasa por el punto $M(a, f(a))$ tiene un contacto de orden 0; la tangente tiene un contacto de orden 1 o mayor.

Se establece que una función es derivable en un punto cuando existe el límite que define la derivada, lo que equivale a que su gráfica tiene tangente en el punto.

En el caso de que la gráfica de la función tenga dos tangentes (o mejor, semitangentes) en el punto, se dice que admite *derivadas a la derecha y a la izquierda*.

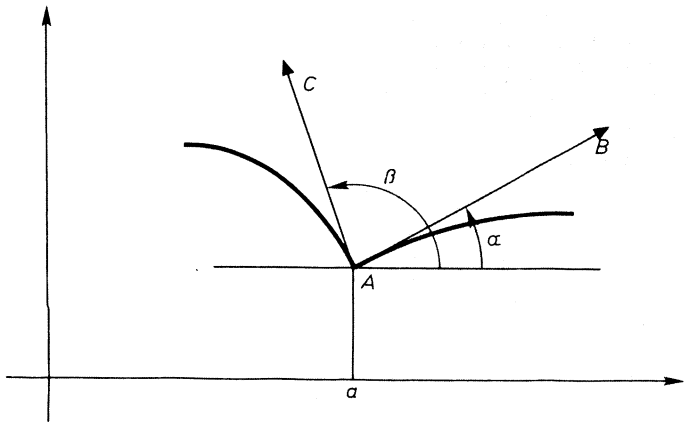


Fig. 6.3

Las derivadas a derecha e izquierda son las pendientes respectivas de las semitangentes.

El punto en cuestión se llama «punto anguloso» por razones obvias.

La gráfica de la figura 6.3 tiene un *punto anguloso A* correspondiente a la abscisa $x = a$. AB es la semitangente a la derecha, y AC es la semitangente a la izquierda.

La *derivada a la derecha* es la pendiente de la recta AB, o sea

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a_+)$$

La *derivada a la izquierda* es la pendiente de la recta AC, es decir

$$\operatorname{tg} \beta = \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a_-)$$

Ejemplo

$$y = |\cos x|$$

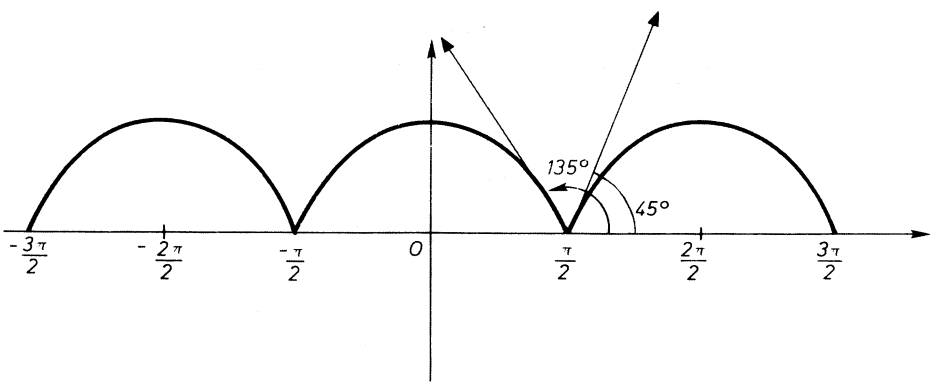


Fig. 6.4

$$y'(\pi/2_+) = 1 = \operatorname{tg} 45°$$
$$y'(\pi/2_-) = -1 = \operatorname{tg} 135°$$

Lo mismo se repite para $x = (2K + 1)\pi/2 \quad K \in Z$.

De la anterior definición se deduce que toda función derivable en un punto lo es a derecha e izquierda. Es condición necesaria y suficiente para que una función sea derivable que sus derivadas a derecha e izquierda existan y sean iguales.

La derivación parcial a derecha e izquierda es una debilitación del concepto de derivada. Pero hay funciones que no son derivables ni siquiera en un sentido. Un ejemplo clásico es la función

$$y = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{para} \quad x \neq 0$$

$$y = 0 \quad \text{para} \quad x = 0$$

Esta función no tiene derivada a derecha ni a izquierda, pues

$$\nexists \lim_{x \to 0_+} \frac{x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

y

$$\nexists \lim_{x \to 0_-} \frac{x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0_-} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

6.4. DIFERENCIAL DE UNA FUNCION DE UN PUNTO

En la proximidad del punto M, para cada valor dado a Δx obtendremos

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Δy es una función de Δx infinitesimal en $\Delta x = 0$

$$\Delta y = |\overline{PH}| = |\overline{PQ}| + |\overline{QH}| = |\overline{PQ}| + f'(a)\,\Delta x$$

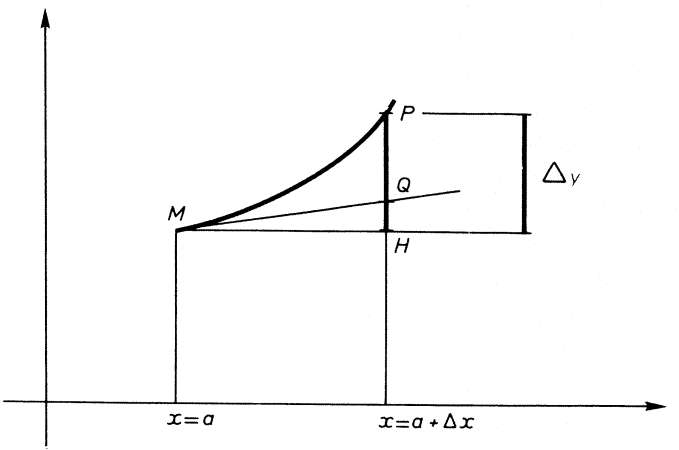


Fig. 6.5

Como $|\overline{PQ}|$ es un infinitésimo de orden superior a Δx, resulta que la parte principal del infinitésimo Δy será $f'(a)\,\Delta x$.

Se puede comprobar, viendo que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{f'(a)\,\Delta x} = \frac{1}{f'(a)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f'(a)}{f'(a)} = 1$$

A la parte principal del infinitésimo Δy se la llamó dy (y se lee «diferencial de y»); así, se escribe:

$$dy = f'(a)\,\Delta x = |\overline{QH}|$$

Si $y = x$, resultará $y' = 1$, luego $dy = \boxed{dx = 1\,\Delta x}$;

por tanto se puede establecer: $\boxed{dy = f'(a)\,dx}$

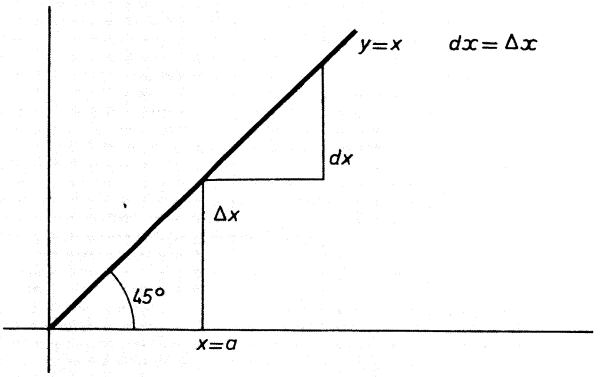


Fig. 6.6

La diferencial de una función en un punto es una función lineal; es la función lineal que más se ajusta en el punto a la función dada.

6.5. CONTINUIDAD DE LA FUNCION DERIVABLE

Proposición. Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.

Demostración

Sea $f(x)$ derivable en $x = a$, o sea, tal que existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Vamos a demostrar que es continua, es decir, que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0,$$

lo cual es inmediato, pues

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=$$
$$=f'(a)\cdot 0=0, \qquad \text{c.q.d.}$$

El recíproco no se verifica. Veamos un contraejemplo clásico:

La función

$$\left\{\begin{array}{ll} y=x\,\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x} & \text{para } x\neq 0 \\ y=0 & \text{para } x=0 \end{array}\right\}$$

es continua en $x=0$, pero no es derivable en este punto, pues no existe el $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$.

Ejercicio

Demuéstrese que si una función tiene derivada a derecha e izquierda es continua.

6.6. CALCULO DE DERIVADAS

Se recuerdan a continuación las fórmulas de derivación de uso corriente. No nos extendemos en detalles, por suponer que son conocidas del lector.

1. $y=c\Rightarrow y'=0$

$$\Delta y=0$$

luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}0=0$$

2. $y=x\Rightarrow y'=1$

$$\Delta y=(x+\Delta x)-x=\Delta x;\ y'=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

3. $y=x^n\Rightarrow y'=n\times{}^{n-1}$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+nx^{n-1}\,\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n-x^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\Delta x\,(\ldots)$$

luego

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

4. $y = u(x) + v(x) \Rightarrow y' = u' + v'$

$$y = u + v \quad ; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \Rightarrow y' = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

5. $y = u(x)\, v(x) \Rightarrow y' = uv' + u'v$

$$y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = uv' + vu'$$

6. $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

$$yv = u \Rightarrow u' = vy' + v'y \Rightarrow y' = \frac{u' - v'u/v}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

7. *Derivada de una función de función*.*

$$y = f(u) \quad ; \quad u = \varphi(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y tomando límites resulta

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

8. $y = \operatorname{sen} x \Rightarrow y' = \cos x$

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$$

---

* Este razonamiento es rápido e intuitivo, pero incorrecto, ya que puede aparecer la indeterminación $0 \cdot \infty$. Véase razonamiento riguroso en *Cálculus de Apóstol o de Spivac*, ambos en Ed. Reverté.

pues

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

puesto que el seno y el arco son infinitésimos equivalentes.

9. $y = \cos x \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} x$

$$y = \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \underset{\text{(por 7)}}{\Rightarrow} y' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$$

10. $y = \operatorname{tg} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{(basta aplicar 6)}$$

11. $y = \operatorname{ctg} x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{(basta aplicar 6)}$$

12. *Derivada de una función inversa*

$$y = f(x) \Rightarrow x = \varphi(y) \quad ; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$$

13. $y = Lx \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

$$y = L(x + \Delta x) - Lx = L\frac{x + \Delta x}{x} = L\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{L\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} L\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

pero

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = e$$

luego

$$y' = \frac{1}{x}$$

14. $y = \log_a x = \dfrac{Lx}{La} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{La}\dfrac{1}{x}$

15. $y = a^x \Rightarrow y' = a^x La$

$$Ly = xLa \quad ; \quad \frac{y'}{y} = La \Rightarrow y' = La \cdot y = La \cdot a^x$$

6.7. CURVAS OSCULATRICES A UNA CURVA EN UN PUNTO

Una curva puede representar una función o una colección de funciones. Consideremos la curva de ecuación $y = f(x)$ (puede ser una parte de la curva, o sea, una «rama» de la función multiforme que, en general, representa la curva).

Se desea aproximar la curva anterior en el punto $x = a$, por medio de otra curva de un tipo dado, por ejemplo, circunferencia, parábola de segundo grado, etcétera. De todas las curvas de la familia existirá una que es la que mejor se ajusta a $y = f(x)$ en $x = a$; esta curva se llama *curva osculatriz* a la dada en $x = a$.

En el capítulo siguiente, como primera aplicación del desarrollo de Taylor, se demostrará que «si $y = g(x)$ es una aproximación de orden n en $x = a$ a $y = f(x)$ se verifica $f(a) = g(a)$; $f'(a) = g'(a)$; ...; $f^n(a) = g^n(a)$; $f^{n+1}(a) \neq g^{n+1}(a)$; y así recíprocamente».

Por tanto, ya tenemos las condiciones a imponer para determinar la curva osculatriz.

Ejemplo 1

Determínese la parábola de eje vertical, osculatriz a una curva $y = f(x)$.

Familia de parábolas de eje vertical $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$;

$$g(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 \quad ; \quad g'(x) = 2a_0x + a_1 \quad ; \quad g''(x) = 2a_0$$

$$\begin{aligned} f(a) = g(a) &\Leftrightarrow f(a) = a_0a^2 + a_1a + a_2 \\ f'(a) = g'(a) &\Leftrightarrow f'(a) = 2a_0a + a_1 \\ f''(a) = g''(a) &\Leftrightarrow f''(a) = 2a_0 \end{aligned}$$

Las tres condiciones anteriores sirven para determinar los tres parámetros a_0, a_1 y a_2 que resuelven el problema.

$$a_0 = \underline{\frac{f''(a)}{2}} \quad ; \quad a_1 = f'(a) - 2a_0a = \underline{f'(a) - af''(a)} \quad ;$$

$$a_2 = f(a) - a_0a^2 - a_1a = f(a) - \frac{a^2}{2}f''(a) - af'(a) + a^2f''(a) =$$

$$= \underline{f(a) - af'(a) + \frac{a^2}{2}f''(a)} \quad ;$$

luego la parábola de eje vertical osculatriz a $y = f(x)$ en el punto $x = a$ es

$$y = \frac{f''(a)}{2}x^2 + (f'(a) - af''(a))x + (f(a) - af'(a) + \frac{a^2}{2}f''(a))$$

Ejemplo 2

Determínese la circunferencia osculatriz a $y = f(x)$.

La familia de circunferencias del plano será $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$.

Derivamos dos veces

$$2(x - x_0) + 2(y - y_0)y' = 0 \quad ; \quad 1 + y'^2 + (y - y_0)y'' = 0$$

La circunferencia ha de tener en $x = a$: $y = f(a)$; $y' = f'(a)$; $y'' = f''(a)$, luego se verificará

$$(a - x_0)^2 + (f(a) - y_0)^2 - R^2 = 0$$
$$(a - x_0) + (f(a) - y_0)f'(a) = 0$$
$$1 + f'(a)^2 + (f(a) - y_0)f''(a) = 0$$

De la última expresión resulta y_0, que sustituida en la segunda determina x_0, y ambas sustituidas en la primera determinan R.

$$x_0 = a - \frac{f'(a)(1 + f'(a)^2)}{f''(a)}$$

$$y_0 = f(a) + \frac{1 + f'(a)^2}{f''(a)}$$

$$R = \frac{(1 + f'(a)^2)^{3/2}}{f''(a)}$$

Estas son las coordenadas del centro y el valor del radio de la circunferencia osculatriz en el punto $x = a$, a la curva $y = f(x)$.

En todos los casos la idea es la siguiente:

Se escribe la ecuación general de la familia de curvas, que dependerá de un cierto número de parámetros arbitrarios.

Se determinan los anteriores parámetros de modo que tenga con la función $y = f(x)$ el mayor número posible de derivadas iguales en $x = a$.

Obsérvese que la tangente a una curva en un punto, tal como la hemos definido, es la recta osculatriz.

6.8. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. Hállese el orden de la aproximación de $y = (x - 3)^4$ con el eje de las x, en el punto $x = 3$.

2. Hállese el orden de la aproximación de las curvas $y = x^2 - 6x + 14$ e $y = 5$ en $x = 3$.

3. Hállese la derivada de $y = (3x^2 - 7)^{Lx}$.

4. Calcúlese la derivada de la función $y = \sqrt{e^{2x}}$.

5. Hállese la diferencial en $x = 2$ de la función $y = \log_{10} \dfrac{x^2 - 5}{3}$.

6. Determínese la diferencial en $x = 1$ de la función $y = (\text{artg } x)L(x^2 + 1)$.

7. Establézcase la curva de la familia $y = ax^2 + bx$ que es osculatriz a $y = e^x$ en $x = 1$.

8. Hállese la ecuación de la circunferencia osculatriz a la parábola $y = 3x^2 - 7x + 5$ en el punto $x = 1$.

9. Determínese la recta osculatriz a la parábola $y = 4x^2 - 6$ en el punto $x = 1$.

10. Establézcase la parábola de eje vertical que es osculatriz a la curva $y = x^3 - 6$ en $x = 2$.

7

Funciones derivables. Estudio local. Gráficas

7.1. VARIACION DE UNA FUNCION ACOTADA

7.1.1. Máximos y mínimos absolutos de una función

Se llama *máximo absoluto* de una función en un intervalo (o cualquier otro subconjunto de $\mathcal{R}$) al mayor de los valores que la función toma en el intervalo.

Puede ocurrir que no exista ningún punto en el que la función alcance el valor máximo.

Análoga definición se establecería para *mínimo absoluto*.

Se ha establecido ya un teorema que asegura que toda función continua en un intervalo cerrado tiene máximo y mínimo absolutos en el intervalo.

7.1.2. Máximos y mínimos relativos de una función

Se dice que la función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en el punto $x = a$ cuando $f(a)$ es mayor que todos los valores de la función en un cierto entorno de $x = a$. El tamaño del entorno no importa, puede ser tan pequeño como se quiera.

Análoga definición se establecería para *mínimo relativo*.

Si $f(x)$ tiene un máximo o mínimo absolutos en un punto interior al intervalo es, al mismo tiempo, máximo o mínimo relativo.

Ejemplo

1) Sea $f(x)$ definida en $[a, b]$, cuya gráfica se ofrece en la figura 7.1.
En $x = a$ tiene mínimo absoluto.
En $x = b$ tiene máximo absoluto.
No tiene máximos ni mínimos relativos.

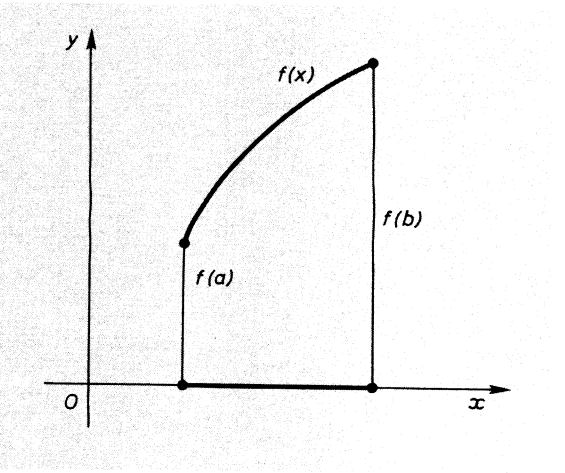


Fig. 7.1

2) Sea $f(x)$ de la figura 7.2.

En $x = a$, mínimo absoluto.
En $x = d$, mínimo relativo.
En $x = e$, máximo absoluto y relativo.

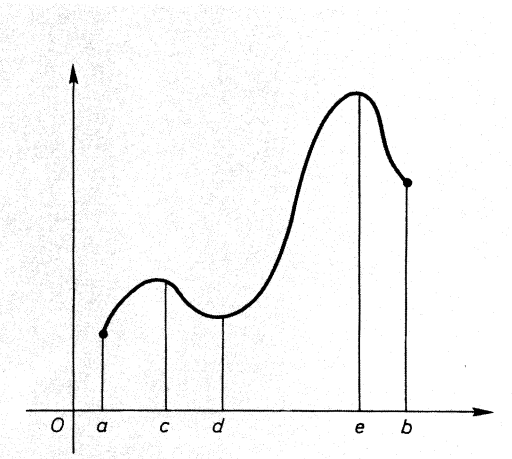


Fig. 7.2

3) Sea $f(x)$ representada en la figura 7.3.

En $x = a$, mínimo absoluto.
En $x = c$, máximo absoluto y relativo.

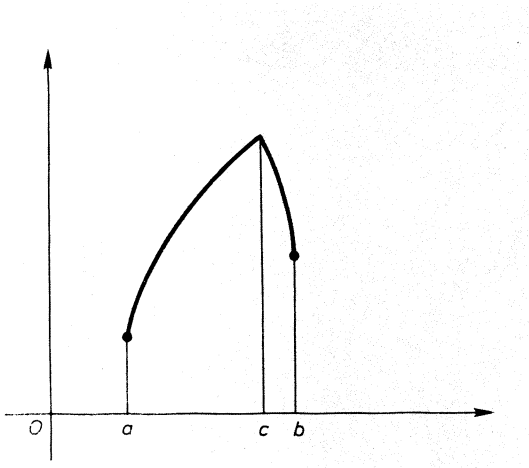


Fig. 7.3

7.1.3. Función creciente o decreciente en un punto

Se dice que una función $f(x)$ es *creciente* en el punto $x = a$ cuando existe un entorno de $x = a$, tal que para los puntos del mismo se verifica

$$x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$$
$$x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$$

Se dice que la función $f(x)$ es *decreciente* en el punto $x = a$ cuando existe un entorno de este punto, tal que para todos los puntos del entorno se verifica

$$x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$$
$$x < a \Rightarrow f(x) > f(a)$$

Ejemplo

$f(x)$ es creciente en $x = a$, y decreciente en $x = b$.
En la figura están dibujados entornos en los que se verifica la definición.

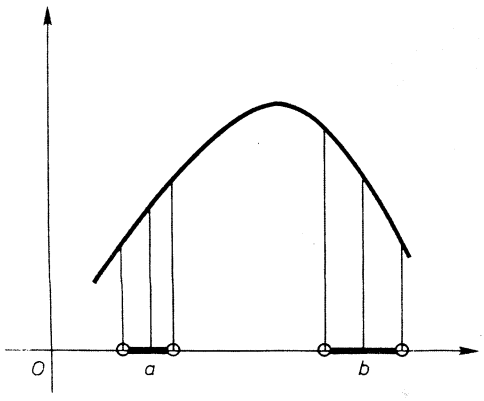


Fig. 7.4

7.2. VARIACION DE UNA FUNCION DERIVABLE

Supóngase que $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$, o sea, que existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Se sabe, del estudio de límites, que existe un entorno de $x = a$ en el que la función $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tiene el mismo signo que $f'(a)$.

Puede ocurrir:

I. $f'(a) > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ en un cierto entorno de $x = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \\ x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \end{Bmatrix}$$ luego la *función es creciente.*

II. $f'(a) < 0 \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$ en un cierto entorno de $x = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x > a \Rightarrow f(x) < f(a) \\ x < a \Rightarrow f(x) > f(a) \end{Bmatrix}$$ luego la *función es decreciente.*

Consecuencia:

Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, y tiene en este punto un máximo o mínimo relativo ha de verificarse $f'(a) = 0$.

Esto es consecuencia de que si fuese $f'(a) \neq 0$, se sigue en virtud de I y II que la función es creciente o decreciente.

Resulta entonces, que la anulación de la derivada es condición necesaria (pero no suficiente) para la existencia de extremo relativo. (Con la palabra «extremo» designamos máximo o mínimo.)

La no suficiencia se ve observando la figura 7.5.

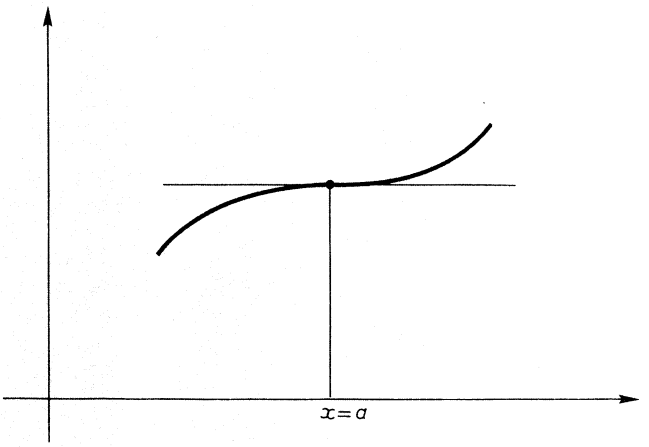


Fig. 7.5

En $x = a$ la derivada se anula puesto que la tangente es horizontal.

Estos puntos en los que la tangente atraviesa la curva se llaman *puntos de inflexión* y serán objeto de un estudio posterior.

7.3. TEOREMA DE ROLLE

El presente teorema es la base de todos los que siguen (Cauchy, media, media generalizada, Taylor).

> Supóngase que $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b), y $f(a) = f(b)$. En estas circunstancias existe un punto $\xi \in (a, b)$, tal que $f'(\xi) = 0$.

Demostración

Puesto que $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, según uno de los teoremas de funciones continuas que conocemos, resultará que $f(x)$ alcanza el máximo y el mínimo absolutos en $[a, b]$.

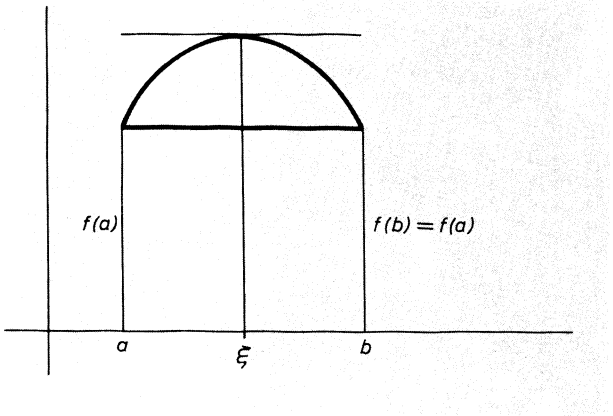


Fig. 7.6

Puede ocurrir que los dos valores los alcance en los extremos a, b, en cuyo caso la función es constante en todo el intervalo y, por lo tanto, su derivada es nula en todos los puntos.

Si el máximo o mínimo absoluto es alcanzado en un punto interior, será también máximo o mínimo relativo y como por hipótesis es derivable, su derivada se anula en el punto, c.q.d.

La interpretación gráfica dice que existe un punto de tangente horizontal.

Creemos interesante insistir con algunos ejemplos en los que «falla» el resultado, por «fallar» alguna de las hipótesis.

1. Continua en $[a, b]$
$f(a) = f(b)$
no es derivable en (a, b), pues no lo es en $C \in (a, b)$.

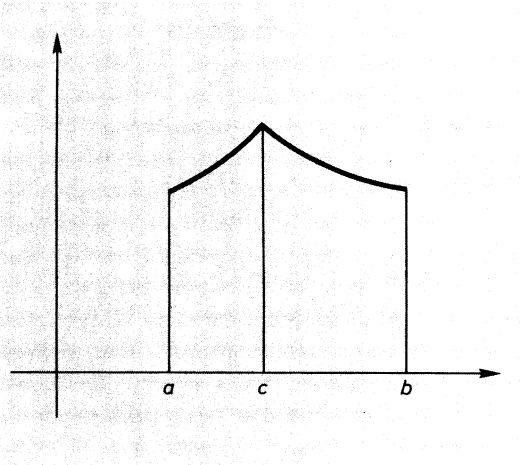


Fig. 7.7

2. Derivable en (a, b)
$f(a) = f(b)$
no es continua en $[a, b]$ por no serlo en el punto a.

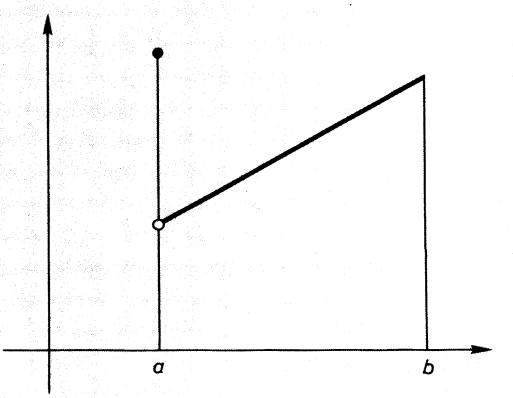


Fig. 7.8

7.4. TEOREMA DE CAUCHY

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, derivables en el intervalo abierto (a, b), tales que $g(a) \neq g(b)$, y sus derivadas no se anulan simultáneamente en (a, b).
En estas circunstancias, se verifica

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

siendo ξ un punto de (a, b).

Demostración

Basta aplicar el teorema de Rolle a la función

$$\Phi(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$$

Veamos que se puede aplicar, porque $\Phi(x)$ verifica las hipótesis:

1. $\Phi(x)$ es continua, por ser suma de funciones continuas.
2. $\Phi(x)$ es derivable, por ser suma de funciones derivables.
3. $\Phi(a) = \Phi(b)$, pues

$$\Phi(a) = g(a)(f(b) - f(a)) - f(a)(g(b) - g(a)) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$
$$\Phi(b) = g(b)(f(b) - f(a)) - f(b)(g(b) - g(a)) = -g(b)f(a) + g(a)f(b)$$

Caso particular. Si $g(x) = x$ resultará

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

que es la expresión del *teorema de la media.*

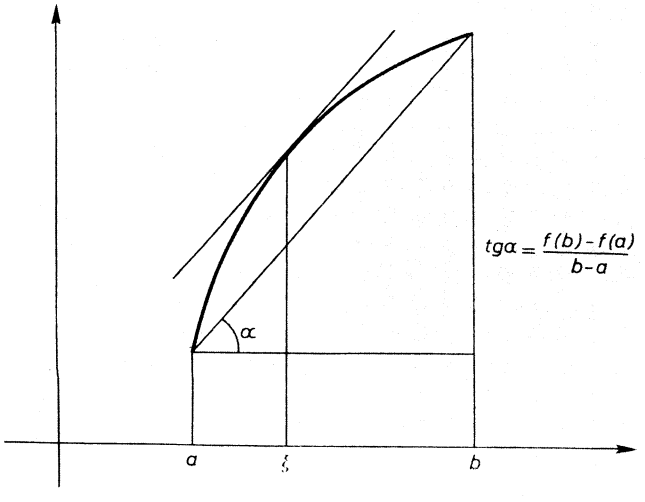


Fig. 7.9

Compruébese como ejercicio que $g(x) = x$ verifica las condiciones del teorema de Cauchy.

Como puede observarse en la figura 7.9, este teorema afirma que existe un punto en el que la tangente es paralela a la cuerda.

Pendiente media de una función en un intervalo

Supongamos que la función $y = f(x)$ sea poligonal. (Fig. 7.10.)

$$f(b) - f(a) = d_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + d_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + d_3 \operatorname{tg} \alpha_3 = (d_1 + d_2 + d_3) \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + d_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + d_3 \operatorname{tg}_3}{d_1 + d_2 + d_3}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = b - a$$

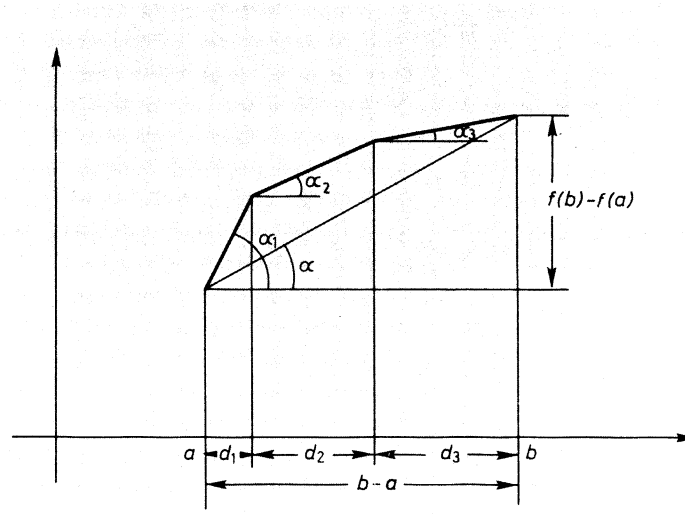


Fig. 7.10

Es decir, $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\Sigma\, d_i \operatorname{tg} \alpha_i}{\Sigma\, d_i}$, fórmula válida para cualquier número de lados de la poligonal, incluso cuando el número de lados tiende a infinito.

Si se generaliza a una poligonal de un número infinito no numerable de lados, en cuyo caso la suma se convierte en integral (Fig. 7.11),

$$tg\ \alpha = \frac{\int_a^b \operatorname{tg} \alpha_x\, dx}{\int_a^b dx} = \frac{\int_a^b f'(x)\, dx}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Es decir, la pendiente de la cuerda es la pendiente media del tramo, y *esta es la razón de llamarse «teorema de la media»*.

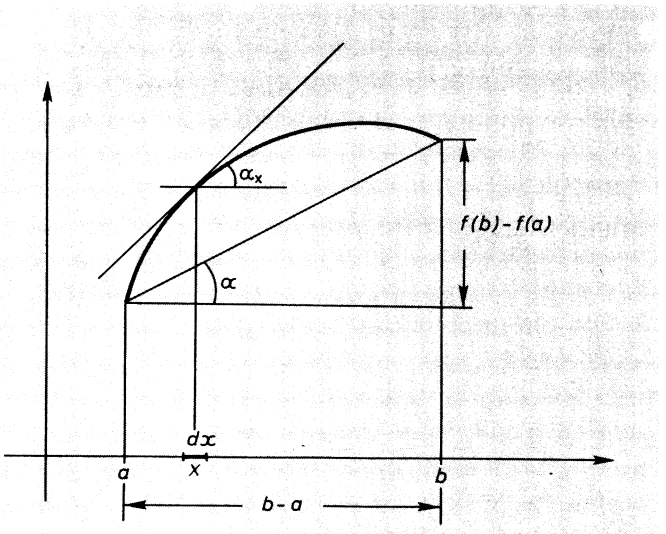


Fig. 7.11

Este teorema afirma que la pendiente media es alcanzada en algún punto del intervalo.

7.5. TEOREMA DE LA MEDIA GENERALIZADA

Sea $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, derivable n veces en el intervalo semiabierto $[a, b)$ y tal que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{n-1}(a) = 0$; en estas circunstancias existe un punto $\xi \in (a, b)$, tal que

$$\frac{f(b)}{(b-a)^n} = \frac{f^{[n]}(\xi)}{n!}$$

NOTA. Para la demostración no se necesita que exista $f^n(a)$, por lo que las hipótesis pueden debilitarse algo.

Demostración

Basta aplicar el teorema de Cauchy, sucesivamente.

Primera aplicación

$$\text{funciones} \begin{Bmatrix} f(x) \\ (x-a)^n \end{Bmatrix} ; \text{ intervalo } [a, b]$$

$$\frac{f(b)}{(b-a)^n} = \frac{f(b) - \overset{//}{\underset{0}{f(a)}}}{(b-a)^n - \underset{//}{\underset{0}{(a-a)^n}}} = \frac{f'(\xi_1)}{n(\xi_1 - a)^{n-1}} \qquad \xi_1 \in (a, b)$$

Este valor se calcula mediante la

Segunda aplicación

$$\text{funciones} \left\{ \begin{matrix} f'(x) \\ n(x-a)^{n-1} \end{matrix} \right\}; \text{ intervalo } [a, \xi_1]$$

$$\frac{f'(\xi_1)}{n(\xi_1 - a)^{n-1}} = \frac{f'(\xi_1) - \overset{0}{\overset{//}{f'(a)}}}{n(\xi_1 - a)^{n-1} - \underset{0}{\underset{//}{n(a-a)^{n-1}}}} = \frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - a)^{n-2}} \quad \xi_2 \in (a, \xi_1)$$

Este valor se calcula mediante la

Tercera aplicación

$$\text{funciones} \left\{ \begin{matrix} f''(x) \\ n(n-1)(x-a)^{n-2} \end{matrix} \right\}; \text{ intervalo } [a, \xi_2]$$

$$\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - a)^{n-2}} = \frac{f''(\xi_2) - \overset{0}{\overset{//}{f''(a)}}}{n(n-1)(\xi_2 - a)^{n-2} - \underset{0}{\underset{//}{n(n-1)(a-a)^{n-2}}}} =$$

$$\frac{f'''(\xi_3)}{n(n-1)(n-2)(\xi_3 - a)^{n-3}} \qquad \xi_3 \in (a, \xi_2)$$

Y así sucesivamente hasta la

Enésima aplicación

$$\text{funciones} \left\{ \begin{matrix} f^{\lfloor n-1 \rfloor}(x) \\ n(n-1)\ldots 2(x-a) \end{matrix} \right\}; \text{ intervalo } [a, \xi_{n-1}]$$

$$\frac{f^{\lfloor n-1 \rfloor}(\xi_{n-1})}{n(n-1)\ldots 2(\xi_{n-1} - a)} = \frac{f^{\lfloor n-1 \rfloor}(a) - \overset{0}{\overset{//}{f^{\lfloor n-1 \rfloor}(a)}}}{n(n-1)\ldots 2(\xi_{n-1} - a) - \underset{0}{\underset{//}{n(n-1)\ldots 2(a-a)}}} =$$

$$= \frac{f^n(\xi)}{n!} \qquad \xi \in (a, \xi_{n-1})$$

Resumiendo:

$$\frac{f(b)}{(b-a)^n} = \frac{f'(\xi_1)}{n(\xi_1 - a)^{n-1}} = \frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - a)^{n-2}} = \cdots =$$
$$= \frac{f^{n-1}(\xi_{n-1})}{n(n-1)\cdots 2(\xi_{n-1} - a)} = \frac{f^{\lfloor n}(\xi)}{n!}$$

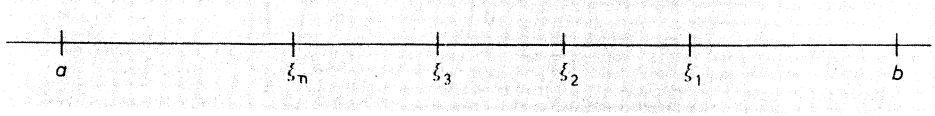


Fig. 7.12

7.6. DESARROLLO DE TAYLOR

Sea $P(x)$ un polinomio de grado n, $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.
Podemos desarrollarlo en potencias de $(x - a)$ siendo a un valor fijo cualquiera.
Sea

$$P(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n$$

Resultará que

$$P'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \cdots + nb_n(x-a)^{n-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P^{\lfloor n}(x) = n!b_n$$

Sustituyendo $x = a$ sucede

$$P(a) = b_0;\ P'(a) = 1!\,b_1;\ P''(a) = 2!b_2;\ \ldots;\ P^{\lfloor n}(a) = n!b_n$$

luego se puede escribir

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Supóngase que $f(x)$ es una función cualquiera que admite derivadas de órdenes 1, 2, 3, ... Por semejanza con la expresión anterior, se nos ocurre escribir

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Añadimos el término $R_n(x)$ porque $f(x)$ no es un polinomio de grado n. Este término es el que hemos de hallar, pues es desconocido.

$$R_n(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \ldots - \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$R_n(x)$ verifica las condiciones del teorema de la media generalizada en el intervalo $[a, x]$, pues es continua y derivable como suma de funciones que lo son, y $R_n(a) = R_n'(a) = \ldots = R_n^{\lfloor n}(a) = 0$.

La aplicación del teorema conduce a

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n^{\lfloor n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

pero

$$R_n^{\lfloor n+1}(\xi) = f^{n+1}(\xi),$$

pues la derivada $(n+1)$-ésima de

$$[f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n]$$

es cero por ser polinomio de grado n; luego

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \xi \in (a, x)$$

El desarrollo de Taylor se puede escribir

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{\lfloor n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$R_n(x)$ se llama resto del desarrollo de Taylor.

La expresión hallada de $R_n(x)$ se conoce como resto de Lagrange.

Para cada x fijo resultará que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

(pues se sabe que $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$, para todo b)

Si las derivadas sucesivas de $f(x)$ están acotadas en un entorno $(a-r, a+r)$, o sea $|f^{\lfloor p}(x)| < M$ para $x \in (a-r, a+r)$ y cualquier orden p de derivación, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{\lfloor n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^n = 0$$

En este supuesto, $f(x)$ puede representarse por la suma de infinitos sumandos:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Esta suma infinita se llama *serie de Taylor* para distinguirla del desarrollo finito. No tiene significado en sí sino como paso al límite cuando el número de sumandos crece:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n \right) =$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Los puntos en los que es válida la representación en serie de Taylor (o sea, en los que el resto tiende a cero para $n \to \infty$), forman un intervalo de centro a que se llama *intervalo de convergencia*, que puede ser como caso particular cero o toda la recta.

En el caso particular de que $a = 0$, el desarrollo de Taylor se llama de Mac Laurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{\lfloor n}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{\lfloor n+1}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Después de todo esto, cabe preguntarse: ¿para qué sirve el desarrollo de Taylor? La respuesta es «para reducir las funciones a polinomios». Los polinomios son fácilmente calculables porque sólo intervienen las cuatro operaciones racionales. Gracias a estos desarrollos se calculan funciones más complicadas como senos, logaritmos, etc.

Incluimos a continuación tres ejercicios que informan y ayudan a fijar los conceptos precedentes.

1. La expresión más general del resto conocida como resto de Schlömilch es

$$R_n(x) = \frac{f^{\lfloor n}(\xi)}{p(n-1)!}(x-a)^p(x-\xi)^{n-p},$$

donde p es un número natural arbitrario.

De esta expresión se obtiene el resto de Lagrange haciendo $p = n$. Si hacemos $p = 1$, el resto que se obtiene es de Cauchy.

Si se hace

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x),$$

donde $R_n(x) = K_n(x)(x-a)^p$, deducir la expresión del resto de Schlömilch aplicando el teorema de Rolle a la función auxiliar de la variable z,

$$\Phi(z) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x-z) + \ldots + \frac{f^{\lfloor n-1}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} + K_n(x)(x-z)^p$$

en el intervalo $[a, x]$.

2. Desarrollar en serie de Mac Laurin sen x, cos x, $\log_e(1+x)$ hasta el cuarto término.

3. Escribir el desarrollo de Taylor con el resto de Lagrange en función de Δx tal que $x = a + \Delta x$.

7.7. APLICACIONES DEL DESARROLLO DE TAYLOR

1. *Para que dos funciones tengan un contacto de orden n en el punto* $x = a$ *es necesario y suficiente que* $f(a) = g(a)$; $f'(a) = g'(a)$; ...; $f^{\lfloor n}(a) = g^{\lfloor n}(a)$; $f^{\lfloor n+1}(a) \neq g^{\lfloor n+1}(a)$.

De esta propiedad hemos hecho uso en el capítulo anterior.

Demostración

$$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\frac{\Delta x}{1!} + f''(a)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots$$

$$g(a + \Delta x) = g(a) + g'(a)\frac{\Delta x}{1!} + g''(a)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots$$

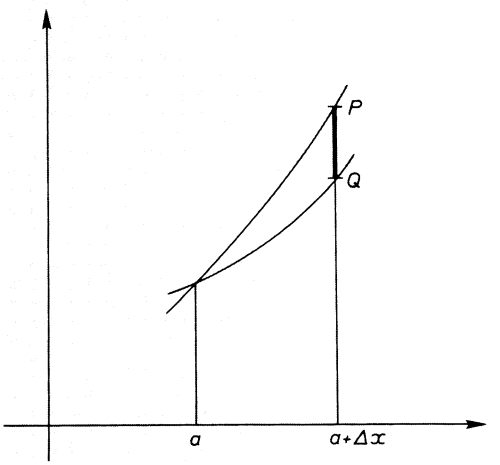


Fig. 7.13

$$|\overline{PQ}| = f(a + \Delta x) - g(a + \Delta x) = (f(a) - g(a)) + (f'(a) - g'(a))\frac{\Delta x}{1!} + \dots$$

$$\dots + (f^{\lfloor n}(a) - g^{\lfloor n}(a))\frac{(\Delta x)^n}{n!} + (f^{\lfloor n+1}(a) - g^{\lfloor n+1}(a))\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

Para que la menor potencia de (Δx) sea $(\Delta x)^{n+1}$, que es lo mismo que decir que $|PQ|$ es de orden $n + 1$, es necesario y suficiente que se verifiquen las condiciones del enunciado.

II. *Posición de una curva respecto a la tangente.*

Sea la curva de ecuación $y = f(x)$. Vamos a determinar la posición de la curva respecto de la tangente en el punto de abscisa $x = a$.

La ecuación de la curva será

$$y = f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

La ecuación de la tangente es

$$y_T = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!}$$

Si restamos, resulta

$$y - y_T = f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \dots$$

Puede ocurrir:

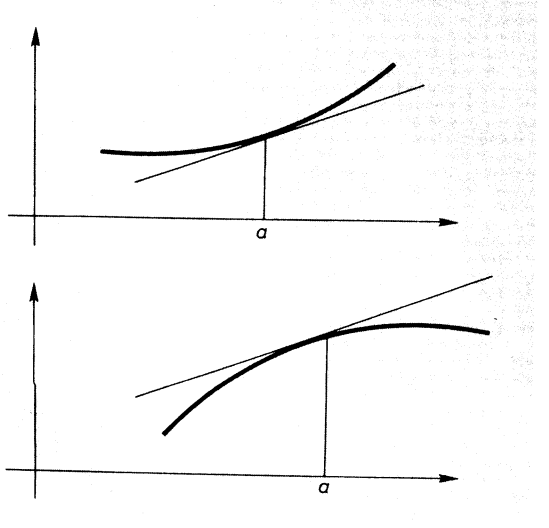
1.°) Si $f''(a) \neq 0$, sucede:

$$y - y_T \simeq f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}$$

para valores de x suficientemente próximos a a; luego

$$\text{signo } (y - y_T) = \text{signo } f''(a);$$

por tanto:



$f''(a) > 0 \Rightarrow y > y_T$

$f''(a) < 0 \Rightarrow y < y_T$

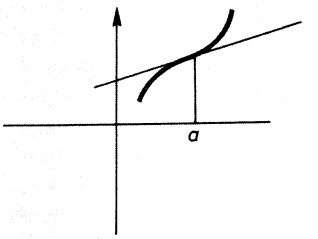
Fig. 7.14

2.°) Si $f''(a) = 0$ $f'''(a) \neq$, resulta

$$y - y_T \simeq f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!},$$

para valores de x suficientemente próximos a a; luego

$$f'''(a) > 0 \Rightarrow \begin{cases} y > y_T & \text{para} \quad x > a \\ y < y_T & \text{para} \quad x < a \end{cases}$$



$$f'''(a) < 0 \Rightarrow \begin{cases} y < y_T & \text{para} \quad x > a \\ y > y_T & \text{para} \quad x < a \end{cases}$$

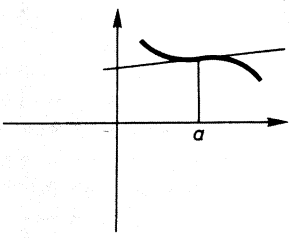


Fig. 7.15

Si $f''(a) = f'''(a) = 0 \wedge f^{IV}(a) \neq 0$, el razonamiento es el mismo que el del caso primero.

Si $f''(a) = f'''(a) = f^{IV}(a) = 0$, el razonamiento es el mismo que el del caso segundo.

Todos los casos se reducen a los dos que han quedado establecidos.

Resumiendo:

— Si la primera derivada que no se anula, a partir de la de segundo orden, es de *orden par*, la curva está del mismo lado respecto de la tangente en un cierto entorno del punto.

— Si la primera derivada no nula, a partir de la de segundo orden, es de *orden impar*, la curva atraviesa la tangente (inflexión).

7.8. CONCAVIDAD, CONVEXIDAD E INFLEXIONES

Consideremos un vector $\vec{v}$ del que sólo interesa la dirección y el sentido; el módulo es indiferente.

Vamos a estudiar los conceptos de concavidad y convexidad de una función, respecto de $\vec{v}$.

Se dice que la función $f(x)$ es *cóncava* en el punto $x = a$, respecto del valor $\vec{v}$, cuando, en un cierto entorno de $x = a$, la curva está en el mismo semiplano que el vector respecto de la tangente.

NOTA. Se supone que el punto de aplicación del vector es el de la gráfica para $x = a$.

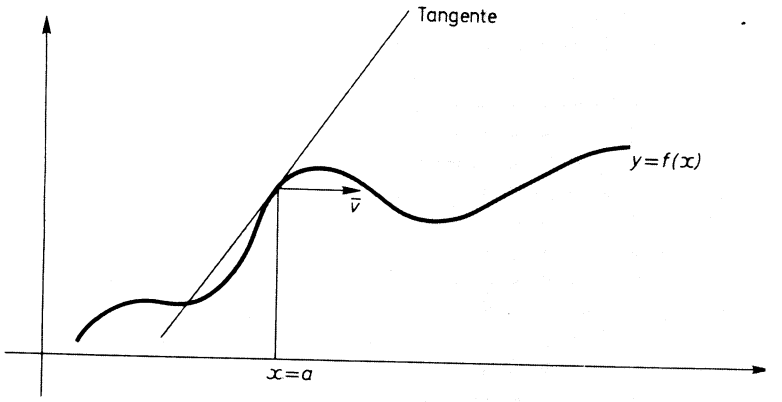
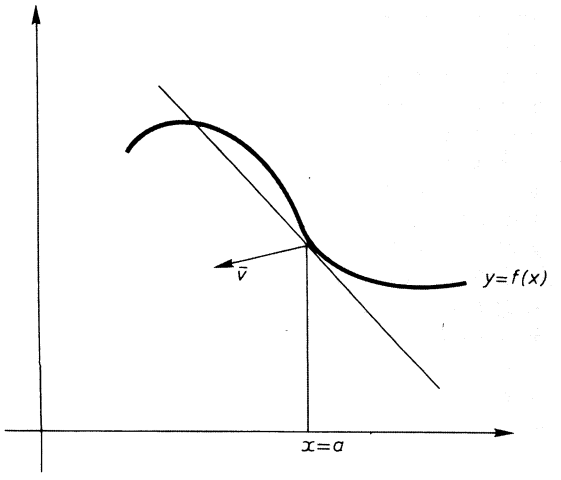


Fig. 7.16

La gráfica es cóncava en $x = a$ respecto de $\vec{v}$.

Se dice que la función $f(x)$ es *convexa* en el punto $x = a$, respecto del vector $\vec{v}$, cuando en un cierto entorno de $x = a$ la curva está en distinto semiplano que el vector $\vec{v}$, respecto de la tangente.



Gráfica convexa en $x = a$ respecto de $\vec{v}$.

Fig. 7.17

Es costumbre tomar un vector $\vec{v}$, de una vez para siempre, definido así:
dirección = dirección del eje y
sentido = sentido positivo del eje y

De esta manera se habla de concavidad y convexidad, y no es necesario indicar respecto de qué vector.

Los puntos en los que la tangente atraviesa la curva, es decir, aquellos en los que cambia de concavidad a convexidad o viceversa, son unos puntos interesantes para el dibujo, llamados de *inflexión.*

Los puntos A y B son puntos de inflexión.

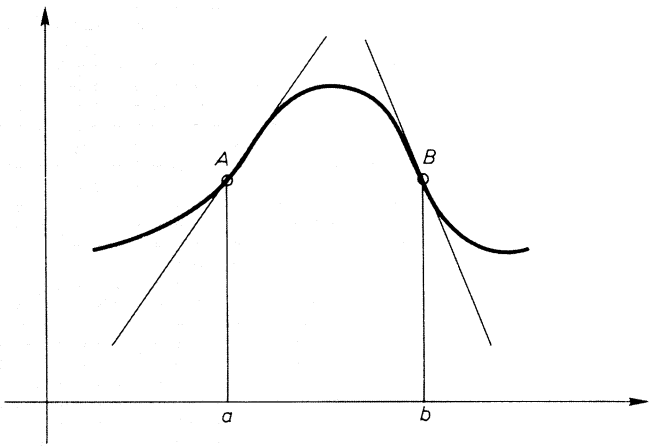


Fig. 7.18

Ejercicio

Señalar los trozos de la gráfica en los que es cóncava, convexa y sus inflexiones.

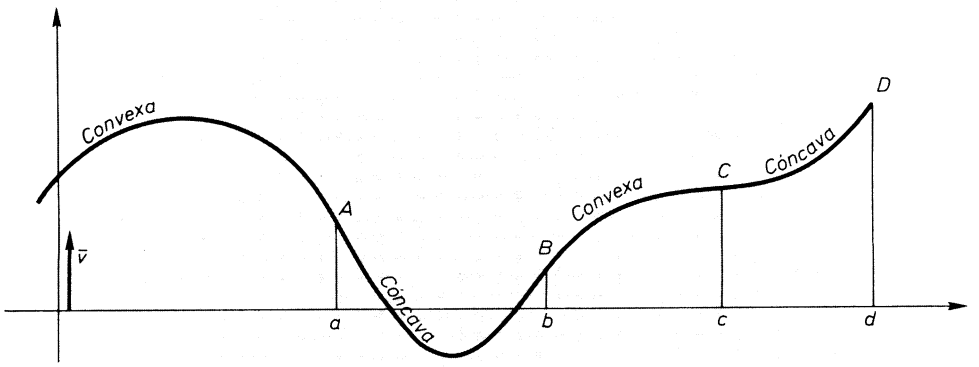


Fig. 7.19

Son puntos de inflexión A, B y C.

Regla práctica

Para determinar si en $x = a$ la curva es cóncava, convexa, o tiene una inflexión, se hallan $f''(x)$, $f'''(x)$, ... y se estudian los valores que toman en $x = a$.

Recordando el estudio que hicimos de la posición de la curva respecto de la tangente resulta:

Si la primera derivada que no se anula (a partir de la de segunda orden) es de orden par, o sea $f^{\underline{|2K}}(a) \neq 0$ puede ocurrir (Fig. 7.20):

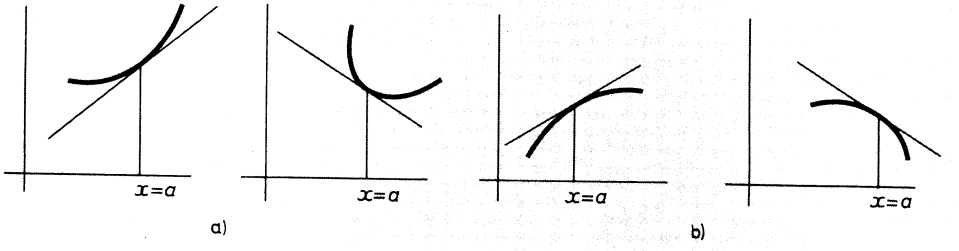
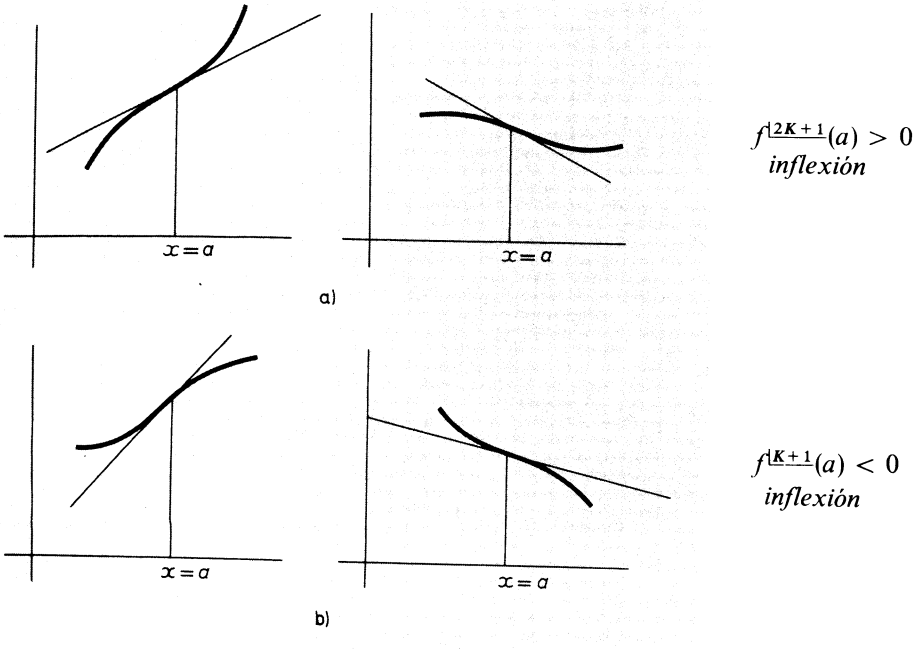


Fig. 7.20 $f^{\underline{|2K}}(a) > 0$ *cóncava* $f^{\underline{|2K}}(a) < 0$ *convexa*

Si la primera derivada que no se anula (a partir de la de segundo orden) es de orden impar, o sea $f^{\underline{|2K+1}}(a) \neq 0$, vimos que la tangente atraviesa la curva y pueden ocurrir dos casos (Fig. 7.21):



$f^{\underline{|2K+1}}(a) > 0$
inflexión

$f^{\underline{|K+1}}(a) < 0$
inflexión

Fig. 7.21

Desarrollamos a continuación tres ejercicios, con el fin de fijar los conceptos que se vienen estudiando.

Ejercicio 1

Determínense los puntos de inflexión de la curva

$$y = 2x^3 - 5x^2 + 3$$
$$y' = 6x^2 - 10x; \qquad y'' = 12x - 10; \qquad y''' = 12$$
$$y'' = 12x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

La primera derivada (a partir de la de segundo orden) que no se anula en $\frac{5}{6}$ es $y''' = 12 \neq 0$, luego en $\frac{5}{6}$ *hay una inflexión*, y es la única pues no hay ningún otro valor de x que anula a y''.

En $x = \frac{5}{6}$ $\qquad y' = -\frac{25}{6}$

$$y = -\frac{125}{27}$$

$$y''' > 0$$

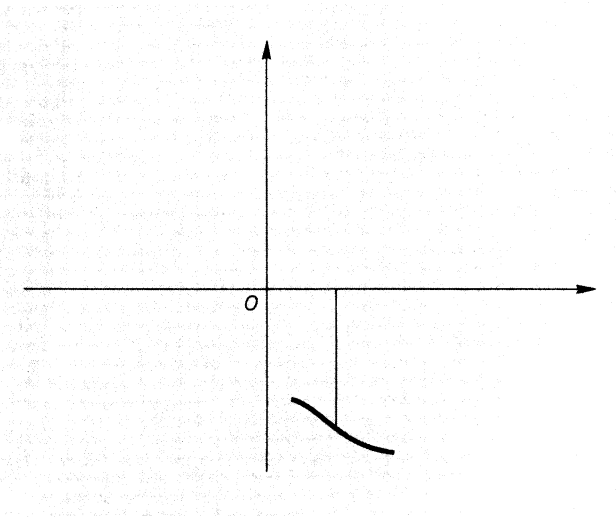


Fig. 7.22

Ejercicio 2

Dada la curva $y = x^3 - x^2 + 3$, averígüese si en $x = 2$ es cóncava o convexa, dibujando la posición de la curva respecto de la tangente

$$y' = 3x^2 - 2x; \qquad y'' = 6x - 2; \qquad y''' = 6; \qquad y'''' = 0$$

Para $x = 2$ $y'' = 10 \neq 0$. Como $y'' > 0$ es *cóncava*.

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 7 \\ y' = 8 \end{cases}$$

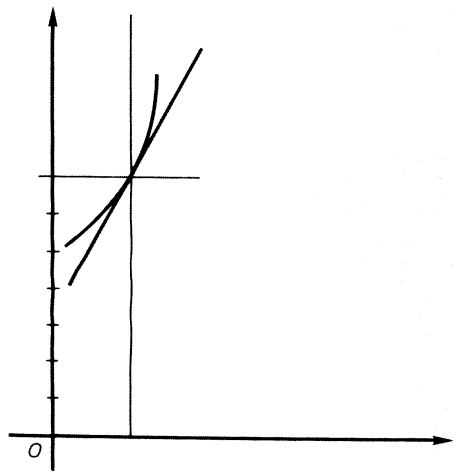


Fig. 7.23

Ejercicio 3

Determínense los puntos en los que la función $y = Lx$ es creciente y decreciente.

$y' = \frac{1}{x}$. Como la función sólo está definida para $x > 0$ resultará $y' > 0$ siempre; luego la función es creciente para todo valor de x.

7.9. DIBUJO DE GRAFICAS DE FUNCIONES EXPLICITAS

A continuación se desarrollan algunos ejemplos de dibujos de gráficas de funciones explícitas. Existen algunos elementos cuya determinación es esencial para conocer la forma de la curva, y otros que sirven para efectuar el ajuste del modo más aproximado posible. Estos deben hallarse siempre que sea posible, y sólo prescindir de ellos cuando el dibujo no tenga otra finalidad que conocer la forma de la gráfica, y no la representación a escala.

A medida que se vayan resolviendo los ejemplos que siguen, se irán comentando los elementos de los que se puede prescindir en cada caso.

Ejemplo 1

Dibújese la gráfica de $y = 2x + 2 + \dfrac{3}{x-3}$.

1. Asíntotas generales del tipo $y = ax + b$.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x(x-3)}\right) = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(2 + \frac{3}{x-3}\right) = 2$$

La recta $y = 2x + 2$ es asíntota.

Esto se veía en la ecuación de la curva, porque resulta de sumar a $2x + 2$ el término $\dfrac{3}{x-3}$, que tiende a cero, cuando $x \to \infty$, pero se ha preferido usar el método general.

2. Posición de la curva respecto de la asíntota en $\pm\infty$.

$$\left.\begin{aligned} y_C &= 2x + 2 + \frac{3}{x-3} \\ y_A &= 2x + 2 \end{aligned}\right\} \; y_C - y_A = \frac{3}{x-3}$$

$x \to +\infty \Rightarrow y_C - y_A > 0 \Rightarrow y_C > y_A$

$x \to -\infty \Rightarrow y_C - y_A < 0 \Rightarrow y_C < y_A$

La posición es la que refleja la figura 7.24.

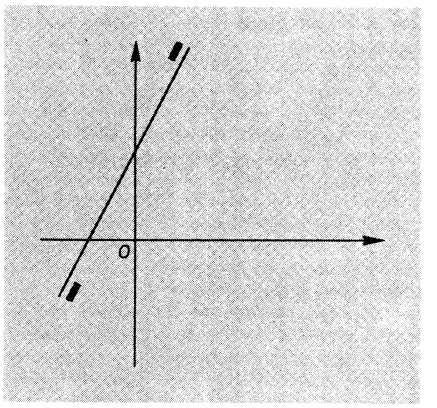


Fig. 7.24

3. Puntos de corte de la asíntota con la curva.

El único punto común al sistema

$$\left.\begin{aligned} y_C &= 2x + 2 + \frac{3}{x-3} \\ y_A &= 2x + 2 \end{aligned}\right\}$$

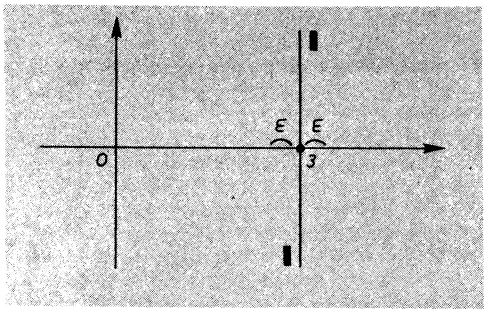
es el que hace $\dfrac{3}{x-3} = 0$. O sea, $x = \pm\infty$. La gráfica no corta a la asíntota.

4. Asíntotas paralelas a los ejes.

   a) Paralelas al eje de abscisas: No existen, pues, de lo contrario, hubieran salido en el procedimiento general, para la pendiente $a = 0$.

   b) Paralelas al eje de ordenadas: Se determinan los valores finitos de x, para los que $y \to \infty$. El único valor es $x = 3$.

5. Posición de la curva, respecto de la asíntota paralela al eje de ordenadas.



$$x = 3 + \varepsilon \to y_C \simeq 6 + 2 + \frac{3}{\varepsilon} > 0$$

$$x = 3 - \varepsilon \to y_C \simeq 6 + 2 - \frac{3}{\varepsilon} < 0$$

Fig. 7.25

Luego la posición es la indicada en la figura 7.25.

Los puntos de corte con asíntotas paralelas al eje de ordenadas no existen, pues para un valor de x no puede haber más de un valor de y, por definición de función.

6. Ramas parabólicas de dirección $y = ax$.

Aparecen cuando al hallar las asíntotas generales la ordenada en el origen resulta ∞.

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}; \quad b = \lim_{x \to \infty} (y - ax) = \infty$$

Si a es ∞, entonces resulta una rama parabólica de dirección y.

En esta gráfica no existen ramas parabólicas.

7. Puntos de corte con los ejes.

En este caso son fáciles de hallar; pero en general interesan, por lo menos, valores aproximados.

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 + \frac{3}{-3} = 1$$

$$y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2} = \begin{cases} 2{,}581 \\ -0{,}581 \end{cases}$$

8. Máximos, mínimos e inflexiones.

$$y' = 2 - \frac{3}{(x-3)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} + 3 = \pm 1{,}225 + 3$$

$$x_1 = 4{,}225 \Rightarrow y_1 = 12{,}899 \quad ; \quad y''(4{,}225) > 0 \text{ mínimo}$$

$$x_2 = 1{,}775 \Rightarrow y_2 = 3{,}101 \quad ; \quad y''(1{,}775) < 0 \text{ máximo}$$

Para ningún valor se anula y'', luego no existen puntos de inflexión.

9. Cuadro de valores.

Siempre es conveniente calcular un cuadro de valores y dibujar la curva en papel milimetrado.

10. Dibujo de la curva.

Los elementos estudiados son suficientes para realizar el dibujo de la figura 7.29.

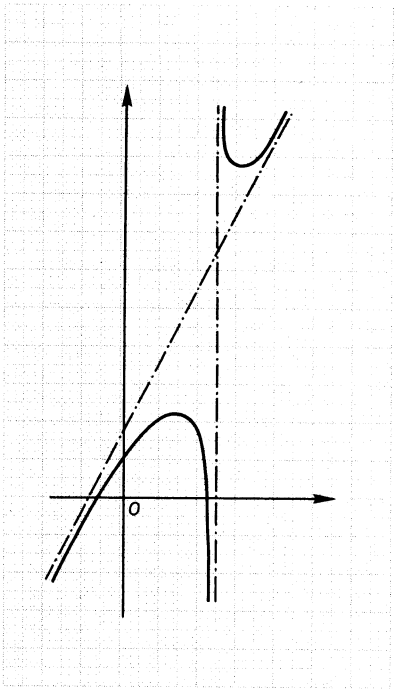


Fig. 7.26

Ejemplo 2

Dibújese la gráfica de $y = \dfrac{x^2(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$.

1. Asíntotas generales.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} = \infty$$

Por lo visto, se trata de rama parabólica de dirección y, y como $y(\pm\infty) > 0$, resulta, como aparece en la figura 7.27:

2. Asíntotas paralelas al eje y.
   Existen dos: $x = -1$, $x = -2$.

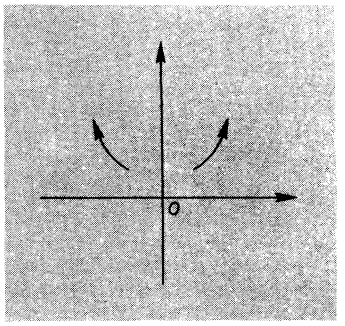


Fig. 7.27

3. Posición de la curva respecto de las asíntotas paralelas al eje y.

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + \varepsilon; \\ y \simeq \dfrac{(-1)^2(-2)(-3)}{\varepsilon} > 0 \\ x = -1 - \varepsilon; \\ y \simeq \dfrac{(-1)^2(-2)(-3)}{-\varepsilon} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{figura } 7.28$$

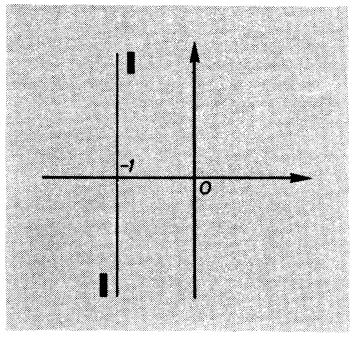


Fig. 7.28

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 + \varepsilon; \\ y \simeq \dfrac{(-2)^2(-3)(-4)}{(-1)\cdot\varepsilon} < 0 \\ x = -2 - \varepsilon; \\ y \simeq \dfrac{(-2)^2(-3)(-4)}{(-1)(-\varepsilon)} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{figura } 7.29$$

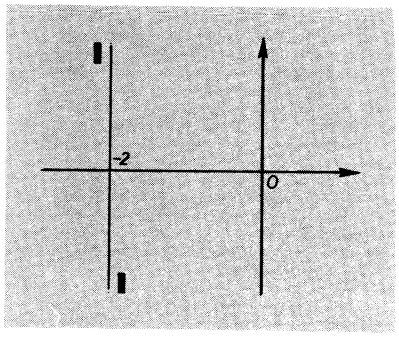


Fig. 7.29

4. Punto de corte con los ejes.

$x = 0 \Rightarrow y = 0$
$y = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (doble):
$x_2 = 1$; $x_3 = 2$

5. Dibujo.

Estos datos son suficientes para conocer la forma de la curva (Fig. 7.30).

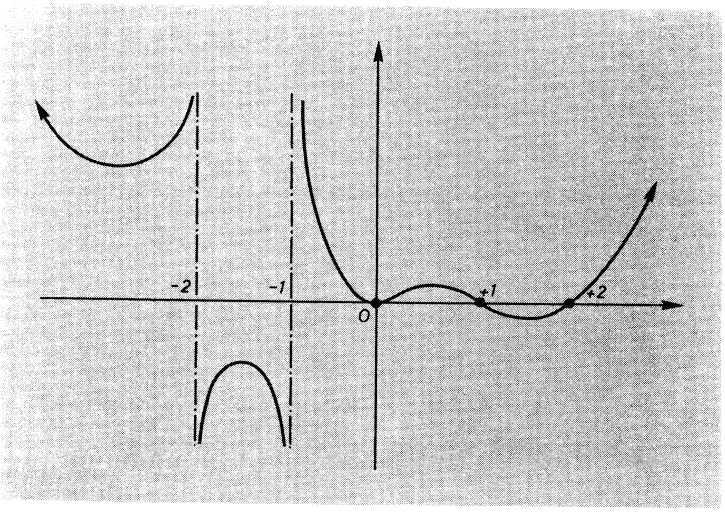


Fig. 7.30

No obstante siempre es aconsejable determinar con exactitud máximos, mínimos e inflexiones y dibujar las tangentes en puntos característicos, como los de inflexión y cortes con los ejes.

Ejemplo 3

Dibújese la gráfica de $y = (x^2 - 2)(x - 1) = x^3 - x^2 - 2x + 2$.

1. Por ser una función polinómica, ya se sabe que no tiene asíntotas y sólo rama parabólica, respecto del eje y. Como el grado es impar, es del tipo de la figura 7.31.

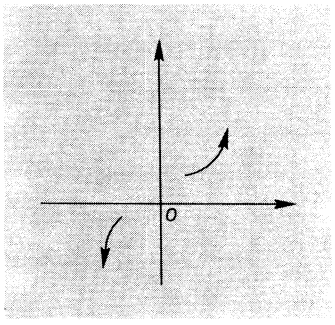


Fig. 7.31

2. Puntos de corte con los ejes.

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \quad ; \quad y = 0 \Rightarrow x_1 = +\sqrt{2} \quad ; \quad x_2 = -\sqrt{2} \quad ; \quad x_3 = 1$$

3. Máximos, mínimos e inflexiones.

$$y' = 3x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} = \begin{matrix} x_1 = 1{,}215, & y_1 = -0{,}112 \\ x_2 = -0{,}549, & y_2 = 2{,}592 \end{matrix}$$

$y'' = 6x - 2$; $y''(x_1) > 0$ mínimo

$y''(x_2) < 0$ máximo

$$y'' = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad ; \quad y'''(1/3) \neq 0 \Rightarrow \text{inflexión} \quad ; \quad y(1/3) = 1{,}26$$

4. Tangentes en los puntos de corte con los ejes e inflexión.

$$\begin{matrix} x = 0 & y' = -2 \\ x = 1 & y' = -1 \\ x = +2 & y' = 1{,}172 \\ x = -2 & y' = 6{,}828 \\ x = 0{,}33 & y' = -2{,}333 \end{matrix}$$

5. Con estos datos se puede dibujar la curva que aparece en la figura 7.32

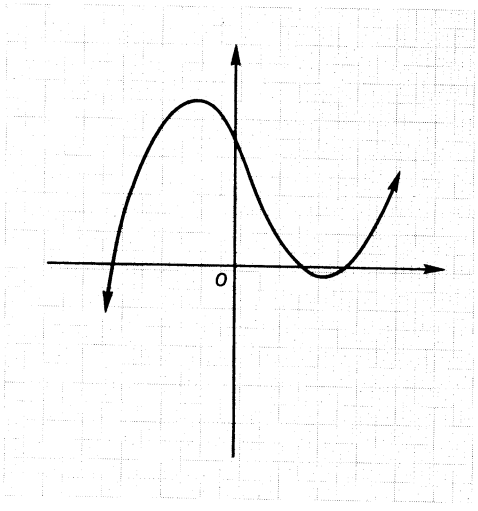


Fig. 7.32

7.10. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. Hállense el máximo y el mínimo absoluto de $y = 3x^3 - 6x$ en el intervalo $[1, 2]$.

2. Hállense los máximos, mínimos e inflexiones de la función $y = x^3 + 4x - 5$.

3. Determínense los intervalos en los que es creciente y decreciente la función $y = \dfrac{1}{x - 2}$.

4. Determínense los intervalos en los que es creciente y decreciente la función $y = 2x^2 + 5x - 3$.

5. Desarróllense, por MacLaurin, determinando los seis primeros términos, las siguientes funciones:

$$y = e^x; \quad y = \operatorname{sen} x; \quad y = \cos x; \quad y = \operatorname{Ch} x$$

6. Determínese la posición de la curva respecto de la tangente en $x = 4$, en la función $y = Lx$.

7. Hállense los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $y = x^3 - - 6x^2 + 5$.

8. Dibújese $y = 3x - 7 + \dfrac{8}{x - 3}$.

9. Dibújese $y = \dfrac{x - 5}{x^2 - 2x + 1}$.

10. Dibújense las curvas trascendentes $y = L\dfrac{x + 1}{x + 2}$; $y = L \operatorname{sen} x$, teniendo en cuenta la gráfica de la función a la que se aplica en cada caso el logaritmo.

8

Separación y aproximación de raíces reales. Interpolación

8.1. INTRODUCCION

Se llaman *ceros* de una función $y = f(x)$ los valores de la variable en los que la función se anula.

Una función igualada a cero, $f(x) = 0$, se denomina *ecuación* (= igualación). Se llaman raíces de $f(x) = 0$ los valores de x que verifican la igualdad, es decir, que la hacen abierta.

En este capítulo sólo se van a considerar ecuaciones polinómicas, o sea, polinomios igualados a cero. Si el polinomio es de grado n, la ecuación se llama *de grado n*.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus raíces.

La resolución de la ecuación de primer grado $a_0x + a_1 = 0$ es inmediata, pues basta con despejar la variable $x = -a_1/a_0$.

Cuando la ecuación es de segundo grado, $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$, se conoce una regla que permite escribir directamente las dos raíces:

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$$

Esta regla para la resolución de la ecuación de segundo grado ya se conocía en tiempos babilónicos.

Si la ecuación es de tercero o cuarto grado, el problema se complica, pero se pueden calcular las raíces mediante una preparación de las ecuaciones y aplicando una fórmula que se mira en cualquier formulario y que no es lógico saber de memoria.

DAL FERRO (1515), profesor de Bolonia, resuelve la ecuación cúbica, y TARTAGLIA la deduce independientemente, por referencias del trabajo de DAL FERRO. CARDANO publica la resolución de ambos en su *Ars Magna*, en 1545, y se debe a su discípulo, LUDOVICO FERRARI, la resolución de la ecuación de cuarto grado que aparece publicada en la misma obra.

Siempre ha existido el deseo de encontrar una fórmula que exprese las raíces de una ecuación general, de grado n, cualquiera que éste fuese. Hasta GALOIS (1830), no se demostró que esto no era posible para grado mayor que 4. ¿Qué se quiere decir con esto?, ¿que las ecuaciones de grado mayor que 4 no pueden resolverse? En absoluto: pueden resolverse las ecuaciones de cualquier grado, si se entiende por resolver una ecuación obtener los valores de sus raíces con aproximación suficiente.

Las raíces racionales se pueden obtener exactamente y las irracionales se pueden conseguir con el número de cifras que se desee; luego, a efectos prácticos, toda ecuación es resoluble. Lo que ocurre es que la raíz no es expresable por medio de una fórmula en la que intervengan operaciones racionales y de radicación.

Haciendo uso de los conocimientos que ya se tienen de Cálculo Diferencial, se pretende, en los apartados que siguen, aproximar las raíces irracionales, mediante métodos que son válidos para una ecuación de cualquier grado.

El procedimiento valdría también para las raíces racionales; pero para éstas no es adecuado, toda vez que pueden calcularse exactamente.

8.2. SEPARACION DE RAICES

Una primera cuestión que se presenta es la de *separar* las raíces de la ecuación, o sea, determinar intervalos disjuntos de la recta, tales que cada uno tenga una sola raíz. Por ejemplo, las raíces de la ecuación $x^3 - 2x = 0$, que son 0, $-\sqrt{2}$ y $+\sqrt{2}$, quedan separadas por los intervalos $(-2, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, 2)$, pues cada uno contiene una sola raíz y son disjuntos (Fig. 8.1).

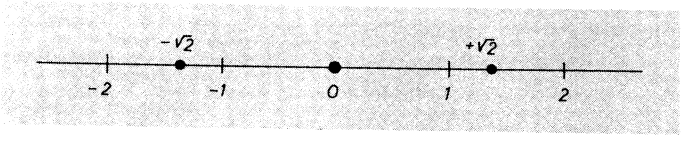


Fig. 8.1

Ha de recordarse que una función polinómica es continua y derivable un número indefinido de veces en toda la recta real. Por ello son aplicables a las funciones polinómicas los teoremas de las funciones continuas y derivables. Uno de estos teoremas es el de Bolzano, que asegura que si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces existe por lo menos una raíz en el intervalo (a, b).

Ejercicio

Demuéstrese, haciendo uso de la descomposición factorial de polinomios, que, en el supuesto del teorema de Bolzano, el número de raíces es impar.

Supóngase que se desea calcular una raíz con una aproximación dada, por ejemplo, $> 1/10^3$, y que $b - a < 1/10^3$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios. El teorema de Bolzano asegura que entre a y b existe por lo menos una raíz, de la cual a y b (Fig. 8.2) son aproximaciones menores que $1/10^3$ por defecto y exceso, respectivamente.

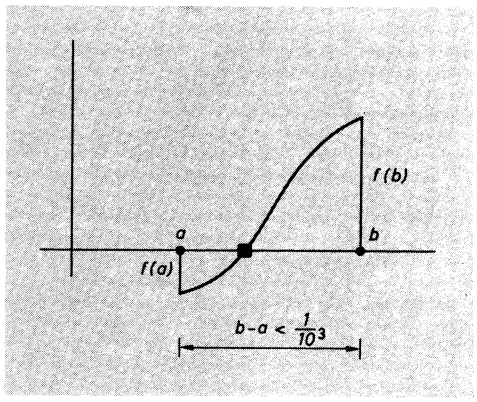


Fig. 8.2

Ahora bien, pudiera ocurrir que entre a y b existiera más de una raíz (Fig. 8.3), pero, a efectos prácticos de aproximación hasta las milésimas, todas las raíces contenidas en (a, b) son iguales, pues todas son aproximadas con error menor que 0,001, por a (defecto) y b (exceso).

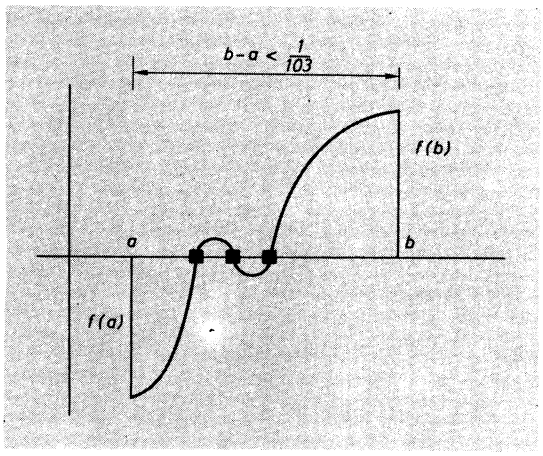


Fig. 8.3

Se puede decir que la aplicación reiterada del problema de Bolzano a una sucesión de puntos en progresión aritmética de razón suficientemente pequeña, establece la aproximación y separación de raíces.

Se fijan cotas de las raíces de la ecuación por el procedimiento que se indica en el apartado siguiente, y se establece un cuadro de valores de $f(x)$ para los valores de x comprendidos entre las cotas (k, K), de unidad en unidad, de décima

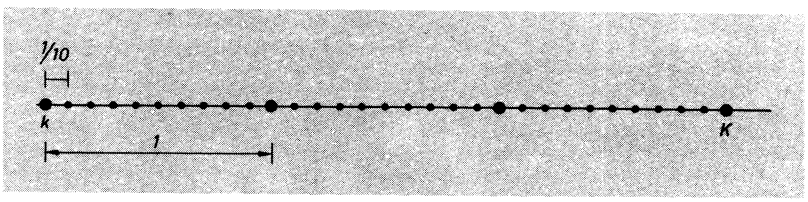


Fig. 8.4

en décima, de centésima en centésima, etc., lo que permitiría aproximar y separar las raíces con errores menores que 1; 0,1; 0,01; 0,001; ... (Fig. 8.4).

Ejercicio 1

Demuéstrese que si la derivada no se anula en ningún punto de (a, b), $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces sólo puede existir una raíz de $f(x)$ (consecuencia del teorema de Rolle).

Ejercicio 2

Demuéstrese que entre cada dos raíces consecutivas de $f'(x)$ sólo puede existir una raíz de $f(x)$ (consecuencia del teorema de Rolle).

8.3. ACOTACION DE LAS RAICES DE UNA ECUACION

Como aplicación del desarrollo de Taylor, vamos a enunciar y demostrar solamente la Regla de Acotación de Newton, que determina una cota superior de las raíces positivas de $f(x) = 0$.

Regla de Newton. K es una cota superior de las raíces positivas de $f(x) = 0$, si $f(K)$, $f'(K)$, ... $f^{(n)}(K) \geq 0$.

En efecto, del desarrollo de Taylor

$$f(x) = f(K) + \frac{f'(K)}{1!}(x - K) + \cdots + \frac{f^{(n)}(K)}{n!}(x - K)^n$$

se deduce que si $x > K$, entonces $f(x) > 0$, por ser suma de términos positivos: luego no existe ninguna raíz mayor que K, c.q.d.

¿Cómo se calcularía una cota inferior de las raíces positivas? Si son $x_1, x_2, \ldots, x_p > k$, resultará $1/x_1, 1/x_2, \ldots, 1/x_p < 1/k$. Es decir, una cota inferior de las raíces positivas puede ser la inversa de la cota superior de las raíces positivas de $f(1/x) = 0$.

Si lo que interesa son las cotas superior e inferior de las raíces negativas de $f(x) = 0$, basta hallar las cotas inferior y superior, respectivamente, de $f(-x) = 0$.

Queda visto que, en cualquier caso, es aplicable la Regla de Newton.

Ejemplo

Acótense, sepárense y aproxímense hasta las décimas las raíces positivas de la ecuación $f(x) = x^4 - 9x^2 + 14 = 0$.

Aplicando la regla de Newton:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^4 - 9x^2 + 14 \\ f'(x) = 4x^3 - 18x \\ f''(x) = 12x^2 - 18 \\ f'''(x) = 24x \\ f^{IV}(x) = 24 \end{array}\right\}$$

El mínimo valor entero para el que se hacen positivas la función y sus derivadas es 3.

$f^{IV}(1) > 0$; $f'''(1) > 0$; $f''(1) < 0$
$f^{IV}(2) > 0$; $f'''(2) > 0$; $f''(2) > 0$; $f'(2) < 0$
$f^{IV}(3) > 0$; $f'''(3) > 0$; $f''(3) > 0$; $f'(3) > 0$; $f(3) > 0$

La cota superior es $K = 3$.

Para hallar la cota inferior, se considera:

$$f(1/x) = \frac{1}{x^4} - \frac{9}{x^2} + 14 = 0 \Rightarrow 14x^4 - 9x^2 + 1 = 0$$

y se halla la cota superior.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) = 14x^4 - 9x^2 + 1 \\ \varphi'(x) = 56x^3 - 18x \\ \varphi''(x) = 168x^2 - 18 \\ \varphi'''(x) = 336x \\ \varphi^{IV}(x) = 336 \end{array}\right\}$$

El mínimo valor entero que hace positivas la función y sus derivadas es 1

$$\varphi(1),\ \varphi'(1),\ \varphi''(1),\ \varphi'''(1),\ \varphi^{IV}(1) > 0,$$

luego la cota superior de $\varphi(x) = 0$ es $K' = 1$.

La cota inferior de $f(x) = 0$, que se busca, es $k = 1/K' = 1$.

La ecuación $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$ tiene sus raíces positivas comprendidas entre 1 y 3; $f(1) = 6$; $f(2) = -6$; $f(3) = 14$.

Puesto que $f(1)$ y $f(2)$ son de signos contrarios, por lo menos hay una raíz entre (1, 2); por la misma razón hay otra entre (2, 3):

x	$x^4 - 9x^2 + 14$		
1	1 − 9 + 14 =	6	
1,1	1,464 − 10,890 + 14 =	4,574	
1,2	2,074 − 12,960 + 14 =	3,114	
1,3	2,856 − 15.210 + 14 =	1,646	
1,4	3,842 − 17,640 + 14 =	0,202	cambio de signo
1,5	5,063 − 20,250 + 14 =	−1,187	
1,6	6,554 − 23,040 + 14 =	−2,486	
1,7	8,352 − 26,010 + 14 =	−3,658	
1,8	10,498 − 29,160 + 14 =	−4,662	
1,9	13,032 − 32,490 + 14 =	−5,458	
2	16,000 − 36,000 + 14 =	−6	

La raíz comprendida entre 1 y 2 la hemos separado en un intervalo más pequeño, pues sabemos que está comprendida entre 1,4 y 1,5. Pudiera existir más de una raíz, pero en este caso sólo hay una, por ser simétrica la función $f(x)$, respecto del eje y.

Raíz = 1,4 (defecto) ó 1,5 (exceso) con error < 1/10

El mismo, proceso para el intervalo (2, 3), produce:

x	$x^4 - 9x^2 + 14$		
2	16 − 36 + 14 =	−6	
2,1	19,448 − 39,69 + 14 =	−6,242	
2,2	23,426 − 43,56 + 14 =	−6,134	
2,3	27,984 − 47,61 + 14 =	−5,626	
2,4	33,178 − 51,84 + 14 =	−4,662	
2,5	39,062 − 56,25 + 14 =	−3,188	
2,6	45,698 − 60,84 + 14 =	−1,142	cambio de signo
2,7	53,144 − 65,61 + 14 =	1,534	
2,8	61,466 − 70,56 + 14 =	4,906	
2,9	70,728 − 75,69 + 14 =	9,038	
3	81,000 − 81,00 + 14 =	14,000	

La raíz está, pues, comprendida en el intervalo (2,6; 2,7).

Raíz = 2,6 (defecto) ó 2,7 (exceso), con error menor que 1/10.

8.4. CRITERIOS DE SEPARACION

El procedimiento del apartado 8.2 no es un procedimiento matemático riguroso, por lo que vamos a enunciar, sin demostración, los dos criterios más usados para comprobar la separación de raíces.

Criterio de Sturm

El número de raíces simples o múltiples de $f(x) = 0$, comprendidas en (a, b) es $V(a) - V(b)$, donde:

- $f_2(x), \ldots f_{n-1}(x), f_n$ son los polinomios, cambiados de signo del algoritmo de m.c.d., aplicado a $f(x)$ y $f'(x)$;
- $V(a)$ = variaciones de signo de la sucesión $f(a), f'(a), f_2(a), \ldots f_{n-1}(a), f_n$;
- $V(b)$ = variaciones de signo de la sucesión $f(b), f'(b), f_2(b), \ldots f_{n-1}(b), f_n$.

Las operaciones de determinación de los polinomios anteriores y de sus valores en a y b son laboriosas y deben efectuarse con decimales, valiéndose de la regla de cálculo o de una máquina calculadora, por lo que, a menudo, se prefiere el criterio siguiente que, aunque más impreciso, es más rápido.

Criterio de Budan-Fourier

El número de raíces, contada cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad, de $f(x) = 0$ en (a, b) es $V(a) - V(b) - 2$, donde:

- $V(a)$ = variaciones de signo de la sucesión $f(a), f'(a), \ldots f^{(n)}(a)$;
- $V(b)$ = variaciones de signo de la sucesión $f(b), f'(b), \ldots f^{(n)}(b)$.

Citaremos, además, el *Criterio de Descartes* sobre el número de raíces posi-

tivas de una ecuación, que dice: El número de raíces positivas de una ecuación es $V - 2$, donde V es el número de variaciones de signo de la sucesión $a_0, a_1, \ldots a_n$ de coeficientes de la ecuación.

Este criterio es una simple aplicación del criterio de Budan-Fourier al intervalo $(0, b)$, con b suficientemente grande como para superar a las raíces, y que el signo de cada polinomio $f(x)$, $f'(x)$, $\ldots f^{(n)}(x)$, sea el de su primer término.

Ejemplo

Vamos a deducir el número de raíces de $x^3 - x^2 + 5x - 7 = 0$, en el intervalo $(1, 2)$, por ambos criterios:

Sturm

Aplicamos el algoritmo de m.c.d. a $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7$ y $f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$, cuidando de cambiar de signo a cada resto, cuando pasa a ser divisor. A fin de no arrastrar fracciones, utilizaremos decimales, empleando calculadora.

	$0{,}33x - 0{,}11$	$-0{,}96x - 1{,}34$
$x^3 - x^2 + 5x - 7$	$3x^2 - 2x + 5$	$-3{,}13x + 6{,}45$
$-x^3 + 0{,}66x^2 - 1{,}65x$	$-3x^2 + 6{,}19x$	
$-0{,}34x^2 + 3{,}35x - 7$	$4{,}19x + 5$	
$0{,}34x^2 - 0{,}22x + 0{,}55$	$-4{,}19x + 8{,}64$	
$3{,}13x - 6{,}45$	$13{,}64$	
//	//	
$-f_2(x)$	$-f_3$	

	$x = 1$	$x = 2$
$f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7$	$-$	$+$
$f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$	$+$	$+$
$f_2(x) = -3{,}13x + 6{,}45$	$+$	$+$
$f_3(x) = -13{,}64$	$-$	$-$
	$V(1) = 2$	$V(2) = 1$

$V(1) - V(2) = 1$; luego, entre 1 y 2 existe una única raíz.

Budan-Fourier

	$x = 1$	$x = 2$
$f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7$	$-$	$+$
$f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$	$+$	$+$
$f''(x) = 6x - 2$	$+$	$+$
$f'''(x) = 6$	$+$	$+$
	$V(1) = 1$	$V(2) = 0$

$V(1) - V(2) - \dot{2} = 1$, pues de 1 el único $\dot{2}$ que se puede restar es 0.

Por este criterio, más rápido, se obtiene, en este caso, la misma exactitud.

Vamos a aplicar ahora el criterio de Descartes, para deducir las raíces positivas:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & -1 & +5 & -7 \end{array} \Rightarrow V = 3 - \dot{2}$$

Luego la ecuación tiene 3 ó 1 raíces positivas.

Ejercicio 1

Aplíquese el criterio de Budan-Fourier para determinar el número de raíces que tiene la ecuación $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 21x + 14 = 0$, en el intervalo $(1, 3)$.

Ejercicio 2

Aplíquese el criterio de Descartes para establecer el número de raíces positivas de la ecuación anterior.

Ejercicio 3

Aplíquese el criterio de Sturm a la ecuación $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ y al intervalo $(-3, 4)$.

8.5. APROXIMACION DE RAICES

Una vez que se han separado las raíces de una ecuación $f(x) = 0$, es decir, encontrado un intervalo (a, b) que contiene a cada raíz y sólo a ella, se impone su aproximación, pues (a, b) puede ser un intervalo muy grande. El método seguido en el ejemplo del apartado 8.3 no es bueno, pues resulta muy largo. Vamos a exponer los métodos más usados.

Obsérvese que si entre a y b existe una sola raíz, entonces $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios.

8.5.1. Método de Regula Falsi o de interpolación proporcional

La raíz que se trata de aproximar es x_1 (Fig. 8.5).

Si se sustituye la curva AB por su cuerda AB, se obtiene un valor α_1, que aproxima la raíz:

$$AB \equiv \frac{y - f(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - b}{a - b}$$

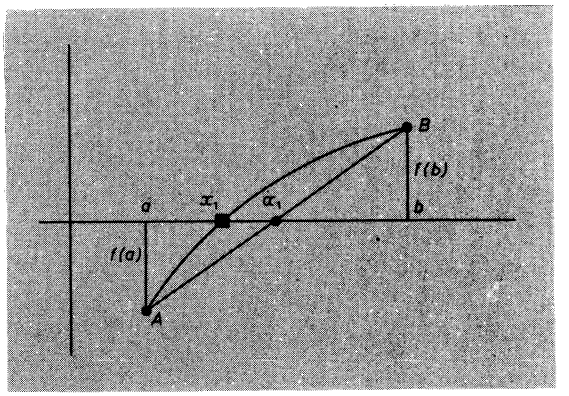


Fig. 8.5

El punto de corte α_1 se obtiene haciendo $y = 0$, en la ecuación anterior:

$$\alpha_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Si $f(\alpha_1)$ tiene el mismo signo que $f(b)$, se aplica nuevamente el método al intervalo (a, α_1), y resulta, como nueva aproximación

$$\alpha_2 = \frac{a \cdot f(\alpha_1) - \alpha_1 \cdot f(a)}{f(\alpha_1) - f(a)}$$

Puede ocurrir que $f(\alpha_2)$ tenga el mismo signo que $f(\alpha_1)$, lo que permite aplicar el método a (a, α_2), y resulta la nueva aproximación

$$\alpha_3 = \frac{a \cdot f(\alpha_2) - \alpha_2 \cdot f(a)}{f(\alpha_2) - f(a)}$$

Así, sucesivamente, se llega a

$$\alpha_n = \frac{a \cdot f(\alpha_{n-1}) - \alpha_{n-1} \cdot f(a)}{f(\alpha_{n-1}) - f(a)}$$

para todo n, si $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, ... $f(\alpha_n)$ tienen el mismo signo que $f(b)$, en cuyo caso (obsérvese la figura 8.6),

$$x_1 = \lim_{n \to \infty} \alpha_n$$

Pudiera ocurrir que $f(\alpha_1)$ tuviera el mismo signo que $f(a)$, en cuyo caso se aplica al intervalo (α_1, b), obteniéndose

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 \cdot f(b) - b \cdot f(\alpha_1)}{f(b) - f(\alpha_1)}$$

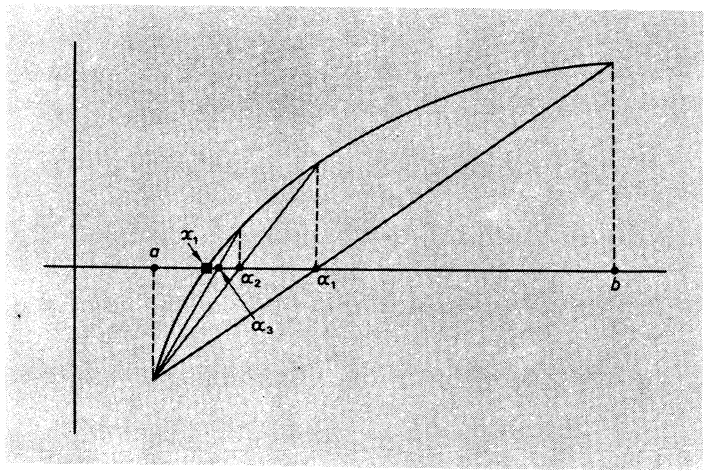


Fig. 8.6

y si se vuelve a repetir el signo para $f(\alpha_2)$, $f(\alpha_3)$, . . . , resultará:

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1} \cdot f(b) - b \cdot f(\alpha_{n-1})}{f(b) - f(\alpha_{n-1})}$$

y también (Fig. 8.7),

$$x_1 = \lim_{n \to \infty} \alpha_n$$

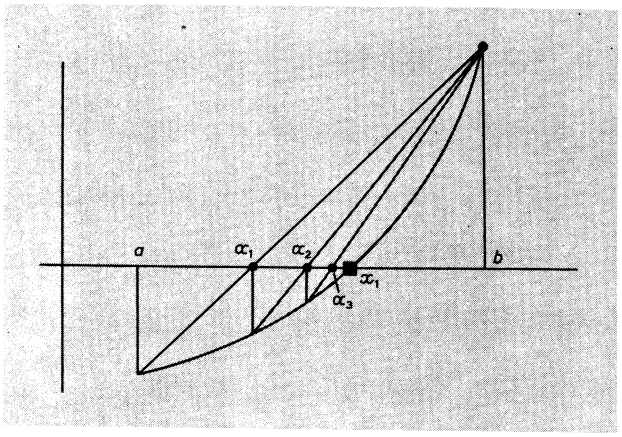


Fig. 8.7

Surge una pregunta: ¿ocurrirá siempre que en los puntos de corte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, de las cuerdas sucesivas, la función tenga el mismo signo que en α_1?

La respuesta es que no siempre ha de ocurrir así (Fig. 8.8).

Si $f''(x)$ no se anula en el intervalo (a, b), o sea, si $f''(x)$ mantiene signo constante en (a, b), o, dicho de otra manera, si la convexidad mantiene la misma orientación, o, lo que es igual, si no hay punto de inflexión en (a, b), entonces $f(\alpha_1)$,

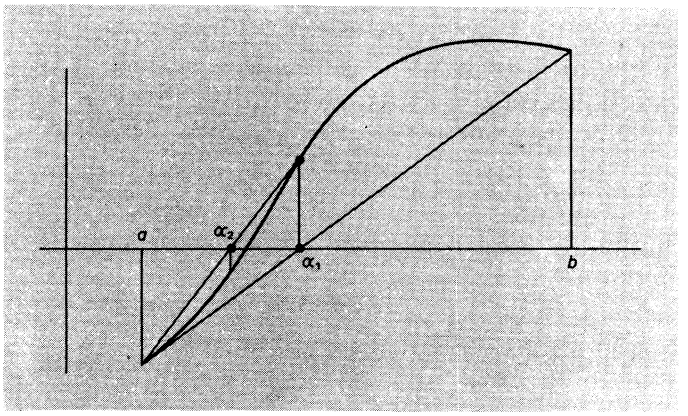


Fig. 8.8

$f(\alpha_2), \ldots f(\alpha_n)$ tienen igual signo, y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ es una sucesión monótona que converge a x_1.

8.5.2. Método de Newton

En el método de Regula Falsi se sustituye, como acaba de verse, el arco de curva por la cuerda, para obtener una aproximación a la raíz. En el método de Newton la curva se sustituye por la tangente en un extremo (Fig. 8.9).

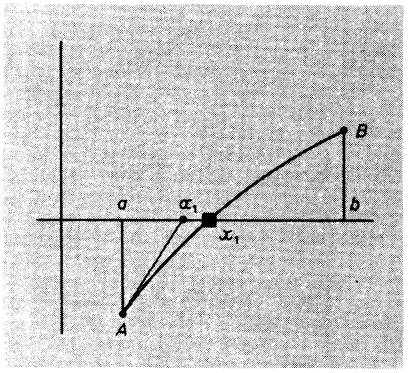


Fig. 8.9

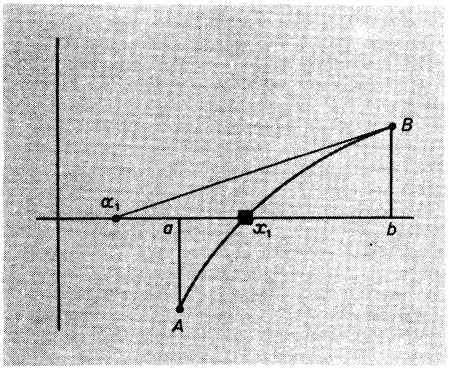


Fig. 8.10

Ecuación de la tangente en A: $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$.

Haciendo $y = 0$, resulta: $\alpha_1 = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

Ahora bien, si se sustituye la curva por la tangente en el punto b (Fig. 8.10), se obtiene un punto α_1 que está fuera del intervalo y, por tanto, su aproximación a x_1 es inferior a la que proporciona el extremo a.

Para estar seguros de que al sustituir la curva por la tangente en un extremo se consigue mayor aproximación, hemos de elegir cuidadosamente el extremo.

Un *criterio suficiente* para la aplicación de este método es:

1. $f''(x)$ no se anula en (a, b);
2. se elige el extremo en que $f(x)$ y $f''(x)$ tengan el mismo signo.

Demostraremos la validez de este criterio: Si el extremo es c (c puede ser el extremo menor a o el extremo mayor b) hemos de comprobar que $c \lesseqgtr \alpha_1 \lesseqgtr x_1$.

El desarrollo de Taylor de $f(x)$ en $x = c$, deteniéndose en el tercer término, da:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2 = 0, \qquad \xi \in (c, x) \qquad [1]$$

Sustituir la curva por la tangente equivale a tomar los dos primeros sumandos:

$$f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) = 0 \qquad [2]$$

y resulta para x el valor α_1:

$$\alpha_1 = c - \frac{f(c)}{f'(c)} \qquad [3]$$

El valor exacto de x_1 se obtiene de [1], y quedaría:

$$x_1 = c - \frac{f(c)}{f'(c)} - \frac{f''(\xi)}{2\,f'(c)}(x_1 - c)^2 \qquad [4]$$

Puesto que $\dfrac{f(c)}{f'(c)}$ y $\dfrac{f''(\xi)}{2\,f'(c)}$ tienen el mismo signo, comparando [3] y [4], resulta, si son mayores que cero, $c > \alpha_1 > x_1$; y, si son menores que cero, $c < \alpha_1 < x_1$. Luego, en cualquier caso, α_1 se aproxima más a x_1 que c, c.q.d.

Cota de error

El error cometido es

$$|x_1 - \alpha_1| = \left|\frac{f''(\xi)}{2f'(c)}(x_1 - c)^2\right| < \frac{K}{2|f'(c)|}(b - a)^2, \qquad \text{si } |f''(x)| < K \text{ en } (a, b).$$

Ejercicio

Explíquese razonadamente en qué puntos extremos de las figuras 8.11 se aplicaría el método de Newton o, lo que es lo mismo, en qué puntos, $f(x)$ y $f''(x)$ tienen el mismo signo. (Sugerencia: fíjese en el crecimiento o decrecimiento de $f'(x)$.)

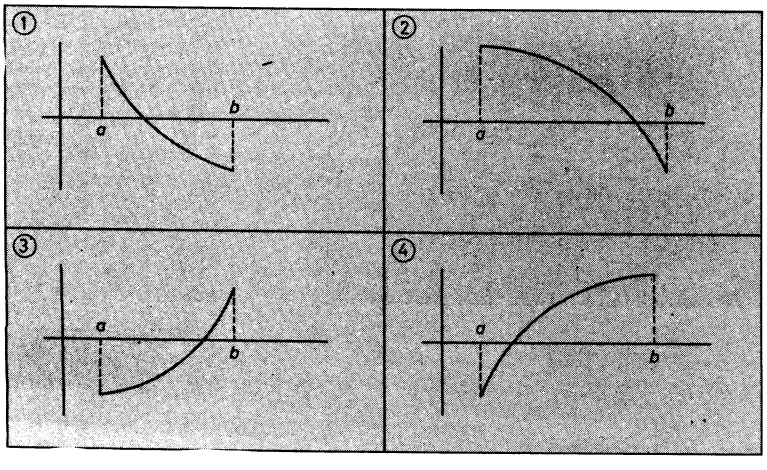


Fig. 8.11

Ejemplo

Aplíquese el método de Regula Falsi y de Newton, para aproximar la raíz de la ecuación $x^3 - x^2 - 2 = 0$, que está entre 1 y 2

$f(1) = 1 - 1 - 2 = -2 \qquad A(1, -2)$
$f(2) = 8 - 4 - 2 = 2 \qquad B(2, 2)$

Regula Falsi

Recta AB: $y + 2 = \frac{4}{1}(x - 1)$.

La cuerda AB corta al eje x en $\alpha_1 = 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$.

Se podría haber aplicado directamente la fórmula:

$$\alpha_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2)}{2 - (-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

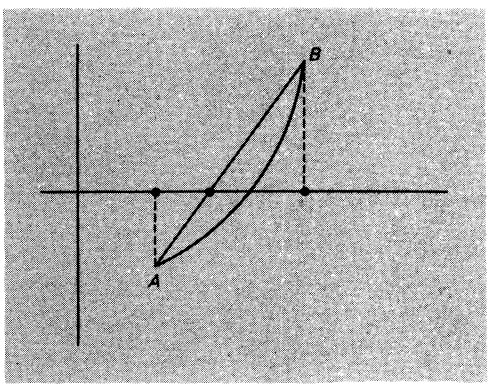


Fig. 8.12

Newton

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2;\ f'(x) = 3x^2 - 2x;\ f''(x) = 6x - 2$$

En el intervalo $(1, 2)$, $f''(x)$ es positiva, luego ha de aplicarse en $x = 2$, punto en el que $f(x) > 0$, también.

Tangente en $x = 2$: $y - 2 = f'(2)(x - 2) = 8(x - 2)$.

La tangente corta al eje x en $\alpha_1 = 2 - \frac{2}{8} = \frac{7}{4}$.

También aquí podría haberse aplicado directamente la fórmula:

$$\alpha_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 2 - \frac{2}{8} = \frac{7}{4}$$

8.6. APROXIMACION A UNA RAIZ POR SUCESIONES MONOTONAS CONVERGENTES

Como una aplicación de teoremas conocidos del Cálculo Diferencial, vamos a demostrar que si $f''(x)$ tiene signo constante en el intervalo (a, b), y $f(x) = 0$ tiene una raíz en ese intervalo, se la puede aproximar por medio de dos sucesiones monótonas convergentes, obtenidas del método de Newton y Regula Falsi, respectivamente.

Esto es posible porque el arco entre a y b está contenido dentro del ángulo que forman la cuerda y la tangente en uno de sus extremos (Fig. 8.13).

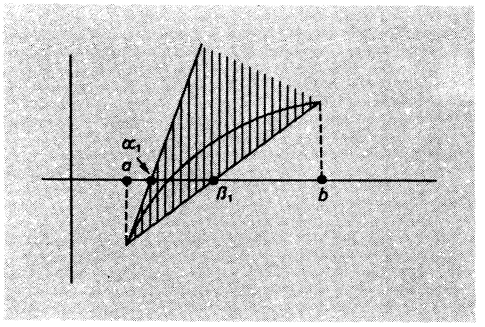


Fig. 8.13

En efecto, si el arco se sale del ángulo y adopta la forma de la figura 8.14, aplicando el teorema de la media a la función $f(x)$ y a los intervalos (a, p) y (p, b), re-

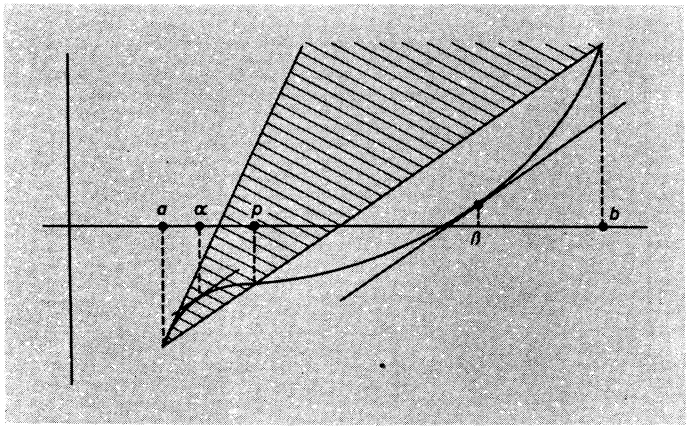


Fig. 8.14

sulta que existirían puntos α, β, interiores a estos intervalos, con tangentes paralelas a la cuerda, en cuyo caso, aplicando el teorema de Rolle al intervalo (α, β) y a $f'(x)$ —cosa que se puede hacer, pues $f'(\alpha) = f'(\beta)$— resulta que la derivada $f''(x)$ se anula en un punto de (α, β) y, por tanto, de (a, b), lo que va contra la hipótesis.

Tampoco puede el arco atravesar a la tangente (Fig. 8.15), pues, por el teorema de la media, aplicado a $f(x)$ y a los intervalos (a, p) y (p, q), existirán puntos α, β en los que la tangente es paralela a la tangente en a. Luego, al aplicar el teorema de Rolle a la función $f'(x)$ y al intervalo (α, β), existirá un punto de (α, β) y, por tanto, de (a, b), en el que $f''(x)$ se anula, lo que va contra la hipótesis de que $f''(x)$ tiene signo constante en (a, b).

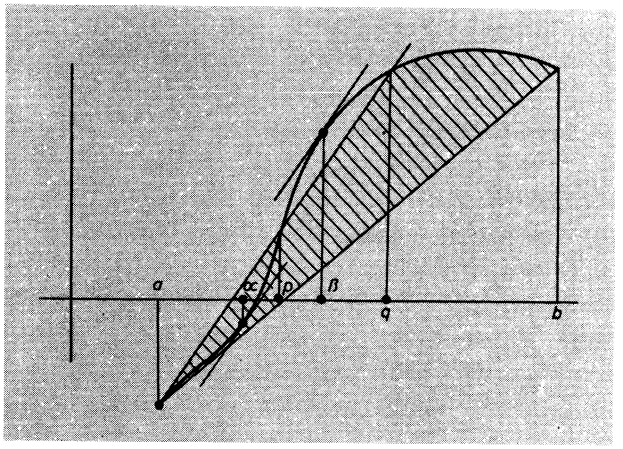


Fig. 8.15

En la figura 8.16 se representan aproximaciones a la raíz x_1, mediante las sucesiones $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \ldots$, creciente y $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n \ldots$, decreciente.

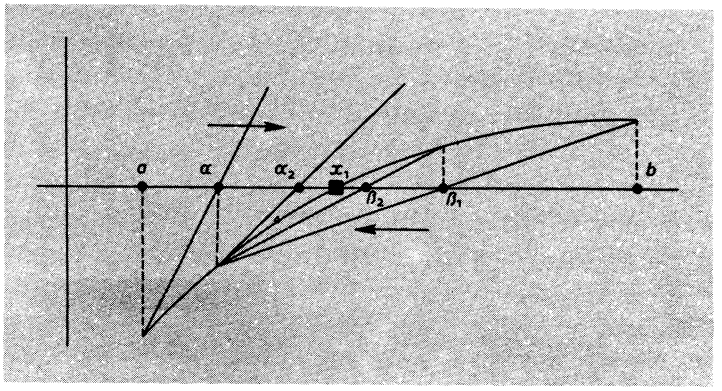


Fig. 8.16

La ley de formación de los términos de ambas sucesiones se escribe a continuación:

Newton

$$\alpha_1 = \frac{a \cdot f'(a) - f(a)}{f'(a)}$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 \cdot f'(\alpha_1) - f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$$

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_2 \cdot f'(\alpha_2) - f(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)}$$

. . . . . .

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1} \cdot f'(\alpha_{n-1}) - f(\alpha_{n-1})}{f'(\alpha_{n-1})}$$

. . . . . .

Regula Falsi

$$\beta_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_1 \cdot f(\beta_1) - \beta_1 \cdot f(\alpha_1)}{f(\beta_1) - f(\alpha_1)}$$

$$\beta_3 = \frac{\alpha_2 \cdot f(\beta_2) - \beta_2 \cdot f(\alpha_2)}{f(\beta_2) - f(\alpha_2)}$$

. . . . . .

$$\beta_n = \frac{\alpha_{n-1} \cdot f(\beta_{n-1}) - \beta_{n-1} \cdot f(\alpha_{n-1})}{f(\beta_{n-1}) - f(\alpha_{n-1})}$$

. . . . . .

Ejemplo

Aproxímese por el método mixto la raíz de $x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$, comprendida entre 2 y 3.

Se hallarán los tres primeros términos de la sucesión creciente y decreciente:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1 \quad ; \quad f(2) = -1 \quad ; \quad f(3) = 10$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 3$$
$$f''(x) = 6x - 2 \quad ; \quad f''(x) > 0 \qquad \text{en } (2, 3)$$

La Regla de Newton se aplica en $x = 3$:

x	$f(x)$	$f'(x)$	f/f'	
3	10	18	0,556	$\alpha_1 = 3 - 0{,}556 = \underline{2{,}444}$
$\alpha_1 = 2{,}444$	2,293	10,031	0,228	$\alpha_2 = 2{,}444 - 0{,}228 = \underline{2{,}216}$
$\alpha_2 = 2{,}216$	0,323	7,301	0,044	$\alpha_3 = 2{,}216 - 0{,}044 = \underline{2{,}172}$

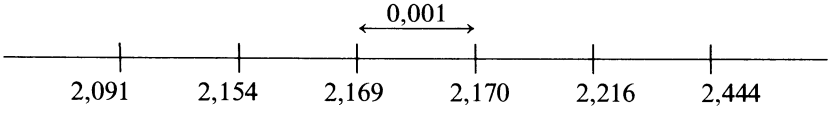
El método Regula Falsi:

$$\beta_1 = \frac{2 \cdot f(3) - 3 \cdot f(2)}{f(3) - f(2)} = \underline{2{,}091}$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_1 \cdot f(\beta_1) - \beta_1 \cdot f(\alpha_1)}{f(\beta_1) - f(\alpha_1)} = \underline{2{,}154}$$

$$\beta_3 = \frac{\alpha_2 \cdot f(\beta_2) - \beta_2 \cdot f(\alpha_2)}{f(\beta_2) - f(\alpha_2)} = \underline{2{,}169}$$

x	$f(x)$
$\beta_1 = 2{,}091$	$-0{,}503$
$\beta_2 = 2{,}154$	$-0{,}108$



Se ha calculado la raíz con aproximación de milésimas.

8.7. INTERPOLACION. INTRODUCCION

Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n), n pares de valores, ordenados en el sentido de las x crecientes, de una función $y = f(x)$, conocida o desconocida; o sea, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ... $y_n = f(x_n)$.

En el plano estos valores representan (Fig. 8.17) n puntos A_1, A_2, ... A_n.

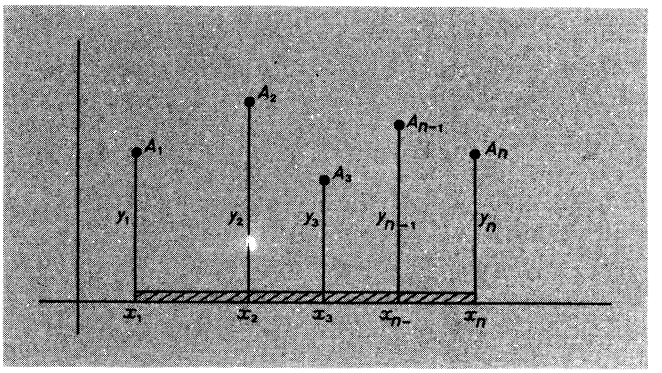


Fig. 8.17

Se desea conocer los valores de la función en los demás puntos x' del intervalo (x_1, x_n). Este es el problema que intenta resolver la *interpolación*. A partir de los n pares de valores (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n), se ha de determinar una función $y = \varphi(x)$ que se verifique para esos puntos y que «sirva» para los demás, $x' \in (x_1, x_n)$.

La función de interpolación ha de verificar:

1. Será lo más sencilla posible. Por eso se toman las funciones polinómicas.
2. En el caso de que $y = f(x)$ sea conocida, el error cometido al sustituir $y = f(x)$ por $y = \varphi(x)$ ha de ser aceptable en todo el intervalo (x_1, x_n).

8.8. POLINOMIOS DE INTERPOLACION

Supóngase una función polinómica de grado n

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

Intervienen los $n + 1$ parámetros a_0, a_1, ... a_n. Por tanto, su determinación requiere $n + 1$ condiciones, que pueden ser $n + 1$ puntos de paso, (x_0y_0), (x_1y_1), ... (x_ny_n):

$$\left.\begin{aligned}
y_0 &= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n \\
y_1 &= a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_1 + a_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_{n-1} &= a_0x_{n-1}^n + a_1x_{n-1}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_n \\
y_n &= a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_n + a_n
\end{aligned}\right\} \quad [1]$$

El sistema [1] tiene $n + 1$ incógnitas y consta de $n + 1$ ecuaciones; además, su determinante es del tipo de Vandermonde,

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & \dots & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}$$

es decir, cada fila (o columna) se obtiene de la fila (o columna) anterior, elevando su exponente en 1. El valor de este tipo de determinantes es

$$\begin{aligned} &(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \dots (x_{n-1} - x_0)(x_n - x_0) \cdot \\ &\qquad (x_2 - x_1) \dots (x_{n-1} - x_1)(x_n - x_1) \cdot \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\qquad\qquad (x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-2}) \cdot \\ &\qquad\qquad\qquad (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Es claro que si los valores $x_0, x_1, \dots x_n$ son distintos, el determinante es distinto de cero. Entonces, se puede aplicar la Regla de Cramer, y el sistema tiene solución única para $a_0, a_1, \dots a_n$. En fin, «por $n + 1$ puntos de abscisas distintas pasará un único polinomio de grado n».

Si n es un poco grande, la resolución del sistema resulta laboriosa. Por ello, una vez demostrado que el polinomio es único, se recurre a diversos métodos, que se exponen a continuación.

8.9. FORMULA DE INTERPOLACION DE LAGRANGE

La fórmula de interpolación de Lagrange permite escribir directamente la función polinómica de grado n, que pasa por los $n + 1$ puntos $(x_0 y_0), \dots (x_n y_n)$:

$$y = y_0 \underbrace{\frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}}_{\text{falta } x_0 \text{ como sustraendo}} + y_1 \underbrace{\frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}}_{\text{falta } x_1 \text{ como sustraendo}} +$$

$$+ \dots + y_n \underbrace{\frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}}_{\text{falta } x_n \text{ como sustraendo}}$$

La comprobación de que es un polinomio de grado n y de que pasa por $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1), \dots (x_n y_n)$ es inmediata. La solución es única, luego éste es el polinomio buscado.

Ejercicio

Compruébese que la fórmula de Lagrange no varía al efectuar el cambio de variable $x = kt + b$ (t, nueva variable).

Ejemplo

Dedúzcase el polinomio que pasa por (1, 1), (2, 5) y (3, 6), aplicando la fórmula de Lagrange.

$$y = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 6 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} =$$
$$= -\frac{1}{2}(x-2)(x-3) - 5(x-1)(x-3) + 3(x-1)(x-2) =$$
$$= -\frac{5}{2}x^2 + \frac{27}{2}x - 12$$

El desarrollo de la fórmula de Lagrange sigue siendo largo; por ello, se acude al algoritmo de Aitken, que se expone en el apartado siguiente.

8.10. ALGORITMO DE AITKEN

La función polinómica de interpolación de $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$ es una recta:

$$y_{01} = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1(x - x_0) - y_0(x - x_1)}{x_2 - x_1} \qquad [1]$$

Análogamente, la función de interpolación entre $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ será:

$$y_{12} = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2(x - x_1) - y_1(x - x_2)}{x_2 - x_1} \qquad [2]$$

Supóngase que lo que se pretende ahora es hallar la función polinómica de interpolación de $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$. La originalidad del método de Aitken consiste en que basta con repetir las mismas fórmulas [1] y [2], aplicando a y_{01}, y_{12}, o sea:

$$y_{(0\,1\,2)} = \frac{y_{12}(x - x_0) - y_{01}(x - x_2)}{x_2 - x_0}$$

Comprobemos que es una parábola de segundo grado que se verifica para $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$ y $(x_2 y_2)$. En efecto, es de segundo grado, puesto que y_{12}, y_{01} son de primer grado y están multiplicados por los polinomios de primer grado $x - x_0$, $x - x_2$, respectivamente. Además,

$$-y_{012}(x_0) = \frac{-y_{01}(x_0)(x_0 - x_2)}{x_2 - x_0} = y_{01}(x_0) = y_0$$

pues y_{01} verifica $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$,

$$-y_{012}(x_1) = \frac{y_{12}(x_1)(x_1 - x_0) - y_{01}(x_1)(x_1 - x_2)}{x_2 - x_0} = \frac{y_1(x_1 - x_0) - y_1(x_1 - x_2)}{x_2 - x_0} =$$
$$= y_1 \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_0} = y_1$$

pues y_{01} e y_{12} verifican $(x_1 y_1)$

$$-y_{012}(x_2) = \frac{y_{12}(x_2)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_0} = y_{12}(x_2) = y_2$$

pues y_{12} verifica $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$.

Como el polinomio es único, resulta que y_{012} es el polinomio de interpolación buscado.

Puede escribirse directamente y_{123}, y_{234}, ...

$$y_{(1\,2\,3)} = \frac{y_{23}(x - x_1) - y_{12}(x - x_3)}{x_3 - x_1} \quad ; \quad y_{(2\,3\,4)} = \frac{y_{34}(x - x_2) - y_{23}(x - x_4)}{x_4 - x_2}$$

Además, si se quiere hallar el polinomio que interpola $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$, se obtiene, aplicando la misma ley:

$$y_{(0\,1\,2\,3)} = \frac{y_{123}(x - x_0) - y_{012}(x - x_3)}{x_3 - x_0}$$

Ejercicio 1

Razónese que y_{0123} es el polinomio de tercer grado que interpola $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$.

Ejercicio 2

Escríbase y_{1234}, y_{3456}.

Análogamente, la interpolación de n puntos $y_{012\,\ldots n-2,\,n-1}$, se obtiene aplicando la misma fórmula a las de interpolación de los $n - 1$ primeros y $n - 1$ últimos: $y_{012\ldots n-2}$, $y_{12\ldots n-1}$

$$y_{(0\,1\,2\,\ldots n-2\,n-1)} = \frac{y_{12\ldots n-1}(x - x_0) - y_{01\ldots n-2}(x - x_{n-1})}{x_{n-1} - x_0}$$

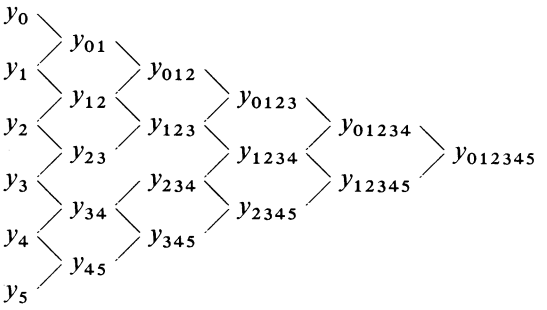
Ejercicio 3

Razónese la fórmula anterior por el mismo método usado anteriormente.

El número de interpolaciones lineales necesarias para interpolar $n + 1$ puntos es

$$n + (n - 1) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{(n + 1)n}{2}$$

El esquema de Aitken para la obtención de y_{012345}, por ejemplo (análogo para n puntos), será:



Ejemplo

Aplíquese el algoritmo de Aitken a la obtención del polinomio interpolante de

$$\begin{matrix}(0,\ 3),\ (2,\ 1),\ (3,\ 5),\ (4,\ 2)\\ (x_0y_0),\ (x_1y_1),\ (x_2y_2),\ (x_3y_3)\end{matrix}$$

$$y_{01}=\frac{y_1(x-x_0)-y_0(x-x_1)}{x_1-x_0}=\frac{1\cdot(x-0)-3(x-25)}{2-0}=-x+3$$

$$y_{12}=\frac{y_2(x-x_1)-y_1(x-x_2)}{x_2-x_1}=\frac{5(x-2)-1(x-3)}{3-2}=4x-7$$

$$y_{23}=\frac{y_3(x-x_2)-y_2(x-x_3)}{x_3-x_2}=\frac{2(x-3)-5(x-4)}{4-3}=-3x+14$$

$$y_{(0\,1\,2)}=\frac{y_{12}(x-x_0)-y_{01}(x-x_2)}{x_2-x_0}=\frac{(4x-7)(x-0)-(-x+3)(x-3)}{3-0}=\frac{5}{3}x^2+$$

$$+\frac{13}{3}x+3$$

$$y_{(1\,2\,3)}=\frac{y_{23}(x-x_1)-y_{12}(x-x_3)}{x_3-x_1}=\frac{(-3x+14)(x-2)-(4x-7)(x-4)}{4-2}=-\frac{7}{2}x^2+$$

$$+\frac{53}{2}x-28$$

$$y_{(0\,1\,2\,3)}=\frac{y_{123}(x-x_0)-y_{012}(x-x_3)}{x_3-x_0}=\frac{\dfrac{-7x^2+53x-56}{2}x-\dfrac{5x^2+13x+9}{3}(x-4)}{4-0}=$$

$$=\frac{1}{24}(-31x^3+173x^2-82x+72)$$

8.11. OTRO METODO GENERAL

Otro método de llegar al polinomio de interpolación es el siguiente:

Se hace $y_{01} = y_0 + a_1(x - x_0)$ y se determina a_1 con la condición de que se verifique para (x_1y_1), o sea:

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Análogamente, se hará $y_{012} = y_{01} + a_2(x - x_0)(x - x_1)$, con a_2 indeterminado, y se fijará con la condición de que la función se verifique para $(x_2 y_2)$, o sea:

$$a_2 = \frac{y_2 - y_{01}(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

A partir de y_{012} se calculará $y_{0123} = y_{012} + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$, determinando a_3 con la condición de que la función se verifique para $(x_3 y_3)$; es decir:

$$a_3 = \frac{y_3 - y_{012}(x_3)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

y así sucesivamente.

Este método es aconsejable cuando lo que se desea es un polinomio del menor grado posible, que se aproxime suficientemente a n puntos, pues las diferencias $y_2 - y_{01}(x_2)$, $y_3 - y_{012}(x_3)$, etc., nos indican si hemos de aumentar el grado para que la aproximación al punto siguiente esté dentro del error admisible o, por el contrario, parar por lo que respecta a ese punto. Claro que esto no daría realmente interpolación, sino ajuste de n puntos.

Ejemplo

Polinomio de interpolación de (0 , 2), (1 , 5), (3 , −1)
(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)

$y_{01} = y_0 + a_1(x - x_0) = 2 + a_1(x - 0)$.

Para que pase por $(x_1 y_1) = (1, 5)$, resultará:

$$5 = 2 + a_1 \cdot 1 \Rightarrow a_1 = 3 \Rightarrow y_{01} = 2 + 3x$$

$y_{012} = y_{01} + a_2(x - x_0)(x - x_1) = 2 + 3x + a_2 x(x - 1)$.

Para que pase por $(x_2 y_2) = (3, -1)$,

$$-1 = 2 + 9 + a_2 \cdot 3 \cdot (3 - 1) \Rightarrow a_2 = \frac{-12}{6} = -2$$

$$y_{012} = 2 + 3x - 2x(x - 1) = -2x^2 + 5x + 2$$

8.12. INTERPOLACION CON PUNTOS DE ABSCISAS EQUIDISTANTES. METODO DE NEWTON

Si $x_i - x_{i-1} = h$ es constante para $i = 1, 2, \ldots n$, las fórmulas de interpolación se aplican haciendo uso de la teoría de diferencias (y sumas) que se describe brevemente.

8.12.1. Algoritmo de sumas

Si a partir de la sucesión $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, se forma la sucesión

$$s_0 + s_1,\ s_1 + s_2,\ s_2 + s_3,\ \ldots,\ s_n + s_{n+1},\ \ldots$$

a esta nueva sucesión se la denomina sucesión de sumas, y se la representa

$$\Sigma s_0,\ \Sigma s_1,\ \Sigma s_2,\ \ldots,\ \Sigma s_n,\ \ldots$$

donde

$$\Sigma s_i = s_i + s_{i+1}, \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Aplicando el mismo algoritmo a la sucesión de sumas, se tendrá la sucesión de sumas segundas

$$\Sigma^2 s_0,\ \Sigma^2 s_1,\ \Sigma^2 s_2,\ \ldots,\ \Sigma^2 s_n,\ \ldots$$

donde

$$\Sigma^2 s_i = \Sigma s_i + \Sigma s_{i+1}, \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

En general, se definen las sumas de orden K, a partir de las de orden $K - 1$,

$$\Sigma^k s_i = \Sigma^{k-1} s_i + \Sigma^{k-1} s_{i+1} \quad , \quad \begin{matrix} i = 0, 1, 2, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

Vamos a demostrar por inducción la importante relación

$$\Sigma^k s_0 = s_0 + \binom{k}{1} s_1 + \binom{k}{2} s_2 + \cdots + \binom{k}{k} s_k \qquad [1]$$

En efecto, para $k = 1$:

$$\Sigma s_0 = s_0 + s_1;$$

para $k = 2$

$$\Sigma^2 s_0 = \Sigma s_0 + \Sigma s_1 = s_0 + 2s_1 + s_2$$

Supongamos que se verifica para $k - 1$, y vamos a demostrar que es cierta para k:

$$\Sigma^{k-1} s_0 = s_0 + \binom{k-1}{1} s_1 + \binom{k-1}{2} s_2 + \cdots + \binom{k-1}{k-2} s_{k-2} + \binom{k-1}{k-1} s_{k-1}$$

$$\Sigma^{k-1} s_1 = \qquad s_1 + \binom{k-1}{1} s_2 + \ldots + \binom{k-1}{k-3} s_{k-2} + \binom{k-1}{k-2} s_{k-1} + \binom{k-1}{k-1} s_k$$

$$\Sigma^k s_0 = \Sigma^{k-1} s_0 + \Sigma^{k-1} s_1 = s_0 + \binom{k}{1} s_1 + \binom{k}{2} s_2 + \cdots + \binom{k}{k-2} s_{k-2} + \binom{k}{k-1} s_{k-1} + \binom{k}{k} s_k$$

(1) (2)

(1) por definición de $\Sigma^k s_0$;
(2) sumando miembro a miembro, habida cuenta de la relación

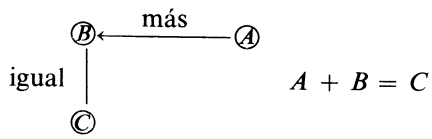
$$\binom{n-1}{h-1} + \binom{n-1}{h} = \binom{n}{h}$$

luego es cierto para k, c.q.d.

El cuadro de sumas es costumbre representarlo en la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n & \dots \\
\Sigma s_0 & \Sigma s_1 & \Sigma s_2 & \dots & \Sigma s_n & \dots \\
\Sigma^2 s_0 & \Sigma^2 s_1 & \Sigma^2 s_2 & \dots & \Sigma^2 s_n & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\Sigma^k s_0 & \Sigma^k s_1 & \Sigma^k s_2 & \dots & \Sigma^k s_n & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

y el esquema de obtención de cada término es:



$$A + B = C$$

8.12.2. Algoritmo de las diferencias

Si a partir de la sucesión $d_0, d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$, se forma la sucesión

$$d_1 - d_0,\ d_2 - d_1,\ d_3 - d_2,\ \dots,\ d_{n+1} - d_n,\ \dots$$

a esta sucesión se la denomina sucesión de diferencias y se representa

$$\Delta d_0,\ \Delta d_1,\ \Delta d_2,\ \dots\ \Delta d_n,\ \dots$$

donde

$$\Delta d_i = d_{i+1} - d_i, \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Aplicando el mismo algoritmo a la sucesión de diferencias, se tendrá la sucesión de diferencias segundas

$$\Delta^2 d_0,\ \Delta^2 d_1,\ \Delta^2 d_2,\ \dots,\ \Delta^2 d_n,\ \dots$$

donde

$$\Delta^2 d_i = \Delta d_{i+1} - \Delta d_i, \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

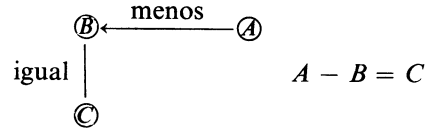
En general, se definen las diferencias de orden k, a partir de las de orden $k-1$,

$$\Delta^k d_i = \Delta^{k-1} d_{i+1} - \Delta^{k-1} d_i, \qquad \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \dots \\ k = 1, 2, \dots \end{array}$$

Es costumbre disponer los términos en un cuadro análogo al de las sumas:

$$\begin{array}{ccccccc} d_0 & d_1 & d_2 & \dots & d_n & \dots \\ \Delta d_0 & \Delta d_1 & \Delta d_2 & \dots & \Delta d_n & \dots \\ \Delta^2 d_0 & \Delta^2 d_1 & \Delta^2 d_2 & \dots & \Delta^2 d_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^k d_0 & \Delta^k d_1 & \Delta^k d_2 & \dots & \Delta^k d_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Cada elemento se obtiene de elementos de la fila anterior, según el esquema



Si en el cuadro de diferencias se cambian filas por columnas, se obtiene un cuadro de sumas:

$$\begin{array}{ccccccc} d_0 & \Delta d_0 & \Delta^2 d_0 & \dots & \Delta^k d_0 & \dots \\ d_1 & \Delta d_1 & \Delta^2 d_1 & \dots & \Delta^k d_1 & \dots \\ d_2 & \Delta d_2 & \Delta^2 d_2 & \dots & \Delta^k d_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n & \Delta d_n & \Delta^2 d_n & \dots & \Delta^k d_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Aplicando a este cuadro de sumas la fórmula [1], resulta la importante relación

$$d_n = d_0 + \binom{n}{1} \Delta d_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 d_0 + \cdots + \binom{n}{n} \Delta^n d_0 \qquad [2]$$

En virtud de [2] se puede escribir

$$y_k = y_0 + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_0 + \cdots + \binom{k}{k} \Delta^k y_0 \qquad [3]$$

Se quiere hallar el polinomio de interpolación de $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$, ... $(x_n y_n)$, donde

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

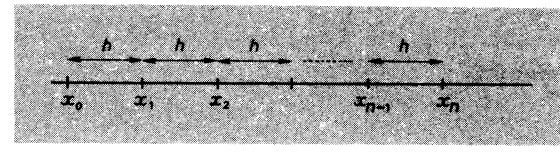


Fig. 8.18

Considérese el polinomio de grado n y variable t:

$$p(t) = y_0 + \binom{t}{1} \Delta y_0 + \binom{t}{2} \Delta^2 y_0 + \cdots + \binom{t}{n} \Delta^n y_0 \qquad [4]$$

Teniendo en cuenta la fórmula [3], este polinomio toma los siguientes valores:

$$t = 0 \quad p(0) = y_0$$

$$t = 1 \quad p(1) = y_0 + \binom{1}{1} \Delta y_0 = y_1$$

$$t = 2 \quad p(2) = y_0 + \binom{2}{1} \Delta y_0 + \binom{2}{2} \Delta^2 y_0 = y_2$$

. . . . . .

$$t = n \quad p(n) = y_0 + \binom{n}{1} \Delta y_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 y_0 + \cdots + \binom{n}{n} \Delta^n y_0 = y_n$$

Si se quiere hallar el polinomio de interpolación de $(x_0 y_0)$, $(x_1 = x_0 + h, y_1), \ldots,$ $(x_n = x_0 + nh, y_n)$, se hace el cambio de variable:

$$\frac{x - x_0}{h} = t$$

y resulta

$$x = x_0 \longrightarrow t = 0$$
$$x = x_1 \longrightarrow t = 1$$
. . . . . .
. . . . . .
$$x = x_n \longrightarrow t = n$$

luego, con la nueva variable t el polinomio buscado es el de interpolación de $(0, y_0)$, $(1, y_1)$, . . . (n, y_n) que, según se vio, es [4].

Si en [4] efectuamos el cambio $\dfrac{x - x_0}{h} = t$, queda:

$$y = p\left(\frac{x - x_0}{h}\right) = y_0 + \frac{1}{h} \frac{x - x_0}{1!} \Delta y_0 + \frac{1}{h^2} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{h^n} \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})}{n!} \Delta^n y_0 \qquad [5]$$

Realmente se utiliza más la forma [4] que la [5]. Ambas se conocen con el nombre de fórmulas de *interpolación de Newton.*

Ejemplo

Aplíquese la fórmula de interpolación de Newton a los puntos (3, 2), (5, 7), (7, 4), (9, 8), (11, 5).

Se puede aplicar, pues $5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
	2	7	4	8	5
Δ	5	-3	4	-3	
Δ^2	-8	7	-7		
Δ^3	15	-14			
Δ^4	-29				

$$p(t) = 2 + \binom{t}{1} 5 - 8\binom{t}{2} + 15\binom{t}{3} - 29\binom{t}{4}$$

o bien,

$$2 + 5\frac{x-3}{2} - 8\frac{(x-3)(x-5)}{2^2 \cdot 2!} + 15\frac{(x-3)(x-5)(x-7)}{2^3 \cdot 3!} - 29\frac{(x-3)(x-5)(x-7)(x-9)}{2^4 \cdot 4!}$$

Existen otras fórmulas de interpolación con más aceptación que la de Newton, como son las de Stirling, Everett, Gauss o Bessel; pero sus desarrollos nos llevarían lejos del tema, ya que no se pretende realizar un curso de Cálculo Numérico, sino exponer las primeras nociones de interpolación.

8.13. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. Aplíquese la Regla de Budan-Fourier a la ecuación $x^4 - 3x^2 - 7x + 4 = 0$.

2. Sepárense, por el método de Sturm, las raíces de la ecuación $x^3 - 2x + 4 = 0$.

3. Aproxímense, por el método de Regula Falsi, las raíces reales de la ecuación anterior.

4. Aproxímense, por el método de Newton, las raíces reales de $x^2 - 7x + 2 = 0$.

5. Aplíquese el método mixto hasta las centésimas, para hallar la raíz positiva de $x^2 - 5 = 0$.

6. Interpólense, por el método de Lagrange, los puntos $A_0(1, 2)$, $A_1(3, 7)$, $A_2(4, -3)$.

7. Aplíquese el método de Aitken para hallar el polinomio de interpolación de los puntos $A_0(0, 1)$, $A_1(2, -3)$, $A_2(3, 5)$, $A_3(4, 3)$, $A_4(5, 1)$.

8. Calcúlese el polinomio de interpolación de Newton de los puntos $A_0(1, 3)$, $A_1(2, 5)$, $A_2(3, 1)$.

9. Interpólese, por el método general, $A_0(1, 5)$, $A_1(2, 4)$, $A_2(4, 3)$.

10. Calcúlense las diferencias sucesivas de la sucesión 1, 8, 27, 64, 125, ...

9

Estudio de algunas curvas planas. Concepto de curva. Curvatura

9.1. INTRODUCCION. REFERENCIA POLAR

El estudio de las curvas más sencillas y usuales que se va a efectuar en el presente capítulo se desarrollará en el plano euclídeo, es decir, en el plano afín ordinario en el que existe una estructura métrica, consecuencia de que el espacio vectorial ordinario está dotado de un producto escalar.

En el plano euclídeo se fija una referencia $R = \{O; \bar{u}_1\ \bar{u}_2\}$ tal que, mientras no se diga específicamente lo contrario, la base $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2)$ es ortonormal, o sea $|\bar{u}_1| = |\bar{u}_2| = 1$, $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0$.

La referencia cartesiana R establece una biyección entre los pares de números reales (x, y), y los puntos del plano. Vamos a formalizar otra referencia que se llama *referencia polar*.

Se fija en el plano euclídeo un vector fijo $\overrightarrow{OA}$ y un sentido de giro que, como es habitual, será el contrario al de las agujas del reloj. *Se llama referencia polar* al vector OA y al sentido de giro g (Fig. 9.1).

Cada par de números (ρ, ω) define un punto M tal que $|\overrightarrow{OM}| = \rho|\overrightarrow{OA}|$ y $\widehat{AOM} = \omega$.

Los números (ρ, ω) se llaman *coordenadas polares* del punto M; ρ es el *módulo* y ω el *argumento*.

La referencia polar no establece como la referencia cartesiana una biyección entre los puntos y sus coordenadas, pues a cada par de números (ρ, ω) le corresponde un punto único, pero no recíprocamente; el punto de coordenadas (ρ, ω) también tiene como coordenadas $(\rho, \omega + 2k\pi)$ para $k \in Z$.

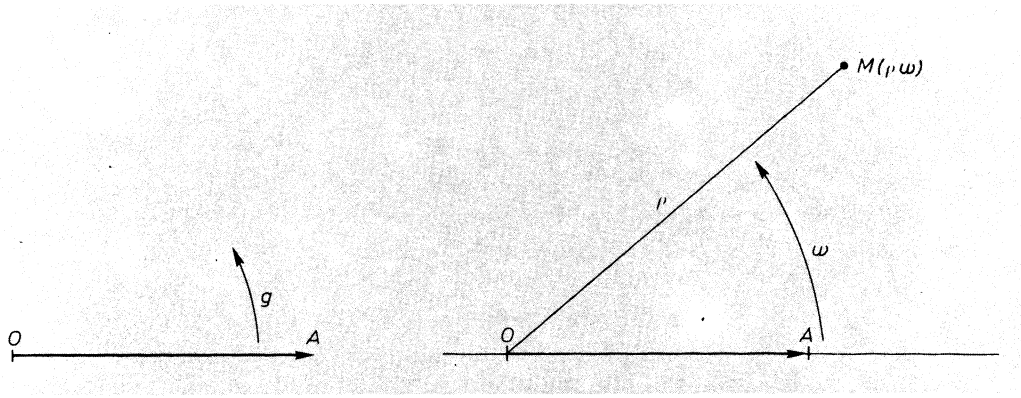


Fig. 9.1

Se acostumbra a tomar como valor de ω el menor de $2\pi : 0 \leq \omega < 2\pi$; e incluso a veces el menor de π en valor absoluto $-\pi < \omega \leq \pi$.

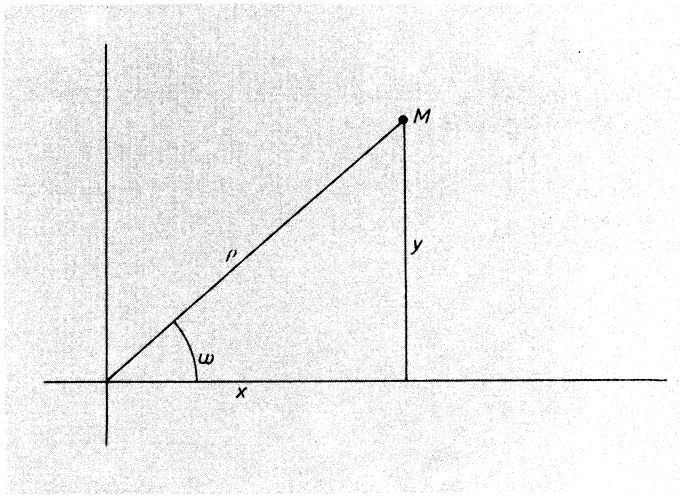


Fig. 9.2

La figura 9.2 permite deducir las fórmulas de paso de coordenadas cartesianas a polares y viceversa.

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho \cos \omega \\ y = \rho \operatorname{sen} \omega \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \omega = \operatorname{artg} \dfrac{y}{x} \end{array}\right\}$$

9.2. ECUACIONES DE LA RECTA EN COORDENADAS POLARES

Puesto que se supone conocida la ecuación de la recta en coordenadas cartesianas, se va a prescindir de este estudio aquí, limitándonos al caso de la ecuación de la recta en coordenadas polares.

a) Si la recta pasa por el polo su ecuación será $\boxed{\omega = \omega_0} = \text{cte.}$

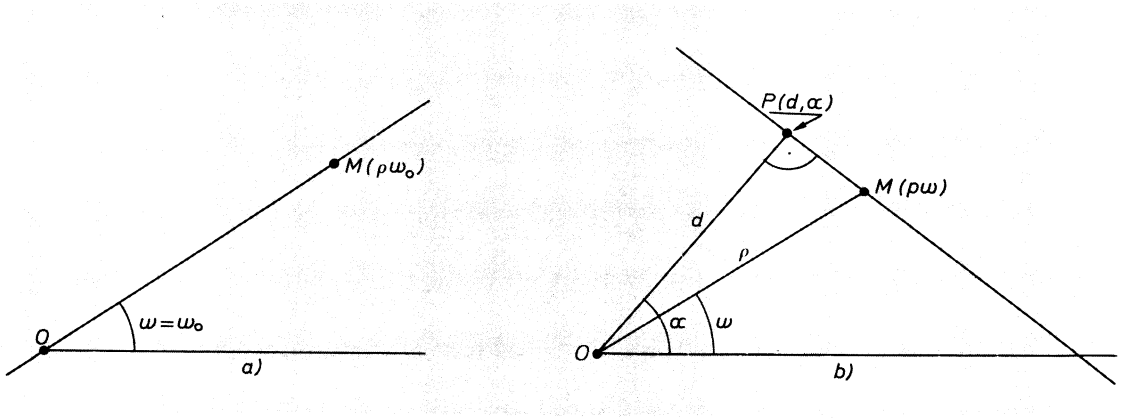


Fig. 9.3

b) Si no pasa por el polo y llamamos d a la distancia del polo a la recta, resultará proyectando OM sobre OP

$$d = \rho \cos(\alpha - \omega), \qquad \cos(\alpha - \omega) = \cos(\omega - \alpha)$$

luego

$$\boxed{\rho = \frac{d}{\cos(\omega - \alpha)}}$$

Esta ecuación puede escribirse

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\omega - \alpha)}{d} = \cos\omega \frac{\cos\alpha}{d} + \operatorname{sen}\omega \frac{\operatorname{sen}\alpha}{d}$$

o sea,

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = A\cos\omega + B\operatorname{sen}\omega}$$

Esta última expresión también puede deducirse de la $Ax + By = C$, sustituyendo $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\operatorname{sen}\omega$.

Ejercicio

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos $A(\rho_A\omega_A)$, $B(\rho_B\omega_B)$.

9.3. ECUACION CARTESIANA Y POLAR DE LA CIRCUNFERENCIA

Recordemos que la circunferencia de centro (x_0y_0) y radio r tiene de ecuación $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$.

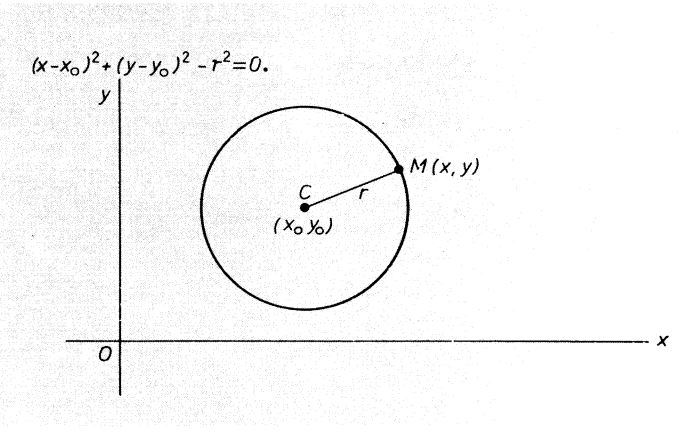


Fig. 9.4

Resultaba de expresar que la distancia MC del centro $C(x_0y_0)$ a un punto genérico $M(x, y)$ es igual al radio $\overline{MC}^2 = r^2$.

Si el centro coincide con el origen de coordenadas $x_0 = y_0 = 0$ y, entonces se reduce a $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

La ecuación de la circunferencia se caracteriza por:

1.º Es de segundo grado.
2.º Los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales.

La ecuación $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ representa una circunferencia cuyos elementos se obtienen al identificar con $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$, o sea con $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$, y resulta $m = -2x_0$, $n = -2y_0$, $p = x_0^2 + y_0^2 - r^2$

Ejercicio

Hállese el centro y radio de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 3x + 5y - 4 = 0$$

En coordenadas polares

a) Si el centro de la circunferencia coincide con el polo la ecuación será

$$\boxed{\rho = r}$$

b) Si el centro está en el eje polar

$$\rho = 2r \cos \omega$$

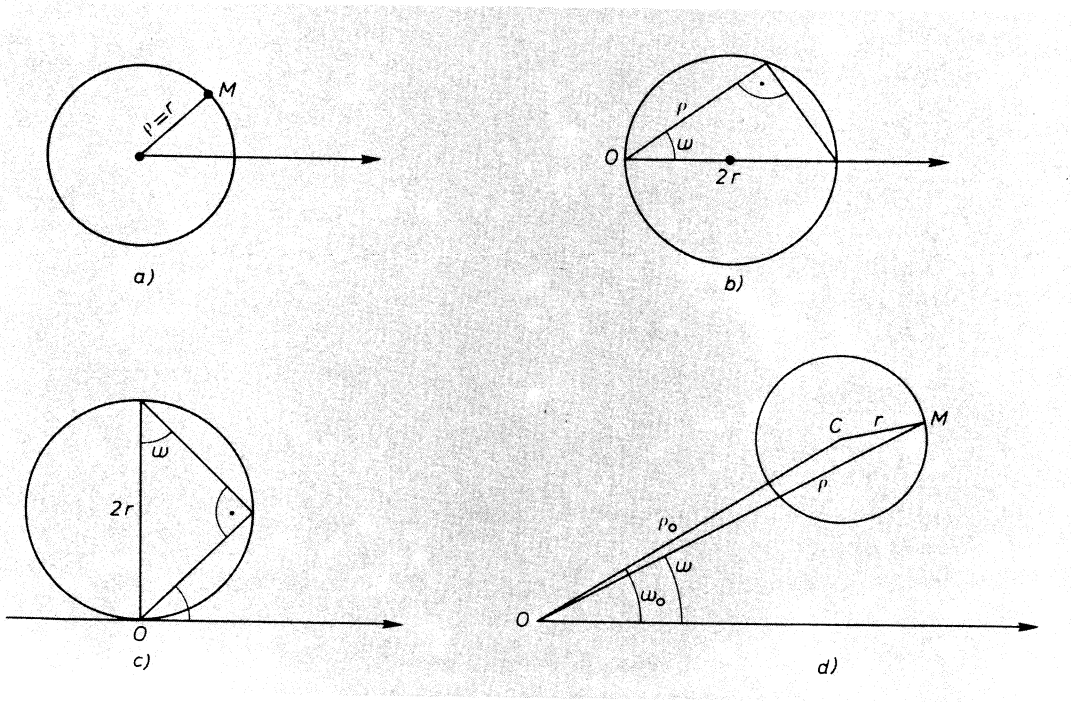


Fig. 9.5

c) Si el centro está en la perpendicular por el polo al eje polar

$$\rho = 2r \operatorname{sen} \omega$$

d) La ecuación en el caso general, con centro cualquiera, tiene mucho menos interés.

En $\widehat{OCM}$, $\overline{MC}^2 = r^2$, o sea

$$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\,\rho_0 \cos(\omega - \omega_0) = r^2$$

Ejercicios

1) Ecuación de la circunferencia de centro $(3, \pi/2)$ y radio $r = 2$.

2) Ecuación de la circunferencia de centro $(4, 0)$ y que pasa por el polo.

9.4. ELIPSE, HIPERBOLA Y PARABOLA

La definición de estas tres curvas se supone conocida. Sus ecuaciones más sencillas resultan cuando los ejes cartesianos se toman coincidiendo con los ejes de simetría (Fig. 9.6).

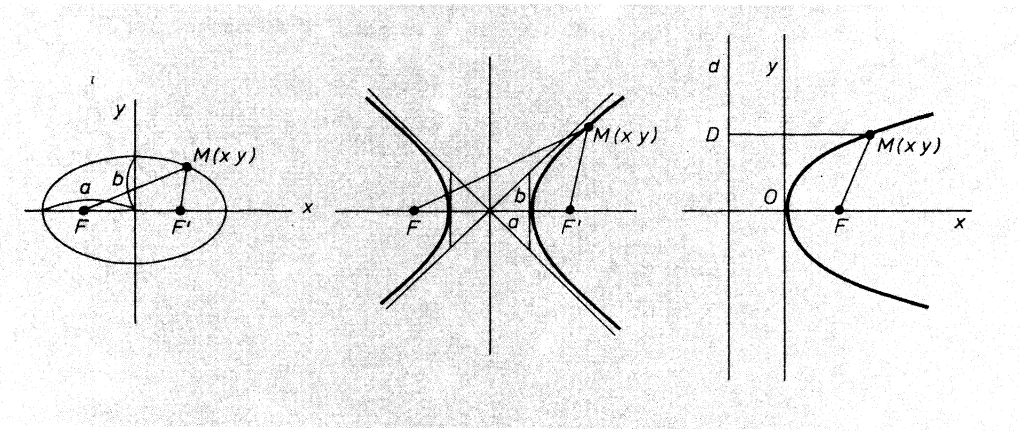


Fig. 9.6

a) $F(-c, o)$ $F'(c, o)$

$$MF + MF' = 2a; \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

Operando resulta

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

b) $F = (-c, o)$ $F' = (c, o)$

$$MF - MF' = 2a; \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

Operando queda

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

c) $F = (p/2, o)$

$$MF = MD; \quad \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = x + p/2$$

Operando queda

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Las tres curvas anteriores reciben el nombre de *cónicas* por razones que se desarrollarán en el apartado siguiente.

Hay una propiedad muy importante que puede servir para definir las tres cónicas.

Si se fija un punto F y una recta d, llamados respectivamente foco y directriz, el lugar de los puntos cuya relación de distancia al foco y a la directriz es constante se llama *cónica*. Es decir, es el lugar de los puntos M tales que

$$\frac{MF}{MD} = e = \text{constante}$$

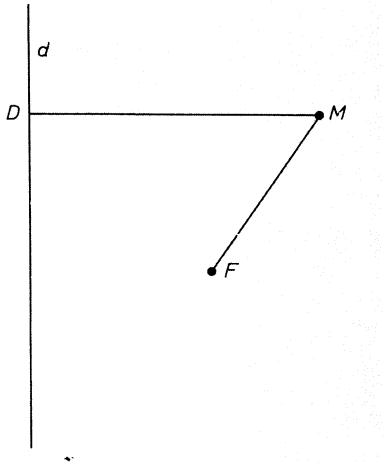


Fig. 9.7

Según los valores de la constante, se tendrá una elipse, hipérbola o parábola. Si $e = 1$, ya se vio que correspondía a parábola, por definición de la misma. Veamos en los restantes casos.

Elipse. $MF = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} =$

$$= \sqrt{x^2 + c^2 - 2cx + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - cx)^2} = \frac{a^2 - cx}{a}$$

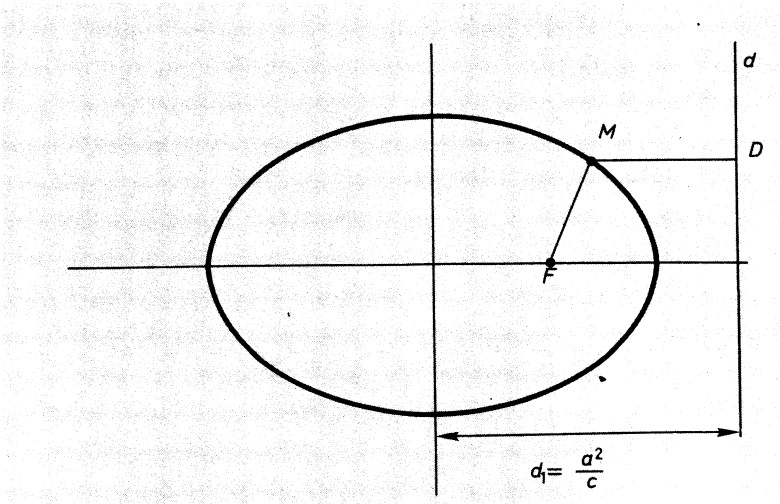


Fig. 9.8

$$MD = d_1 - x = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a^2 - cx}{c}$$

$$\frac{MF}{MD} = \frac{\frac{a^2 - cx}{a}}{\frac{a^2 - cx}{c}} = \frac{c}{a} = \text{cte}$$

Es decir, que si se considera la recta paralela al eje y a la distancia $d_1 = \frac{a^2}{c}$, la elipse es el lugar de puntos M, tales que $\frac{MF}{MD} = \frac{c}{a} = e$.

El valor de $\frac{c}{a}$ se llama *excentricidad* de la elipse y, según se sabe, es menor que 1, pues $c < a$.

Hipérbola. Procede el mismo razonamiento. En este caso $\frac{MF}{MD} = \frac{c}{a} = e > 1$, pues en la hipérbola $c > a$.

Tanto en la elipse como en la hipérbola y parábola se llama *parámetro* la ordenada de la x del foco.

Elipse $\quad x = c \Rightarrow y^2 = b^2\left[1 - \frac{c^2}{a^2}\right] = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow y = \frac{b^2}{a} = \text{parámetro}$

Hipérbola $\quad x = c \Rightarrow y^2 = b^2\left[\frac{a^2}{a^2} - 1\right] = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow y = \frac{b^2}{a} = \text{parámetro}$

Parábola $\quad x = p/2 \Rightarrow y^2 = 2p.\ p/2 = p^2 \Rightarrow y = p/2 = \text{parámetro}$

9.5. ECUACIONES DE LAS CONICAS EN COORDENADAS POLARES

Solamente tiene interés el caso en que el polo coincide con uno de los focos, y el eje polar con el eje mayor.

$$a)\quad \frac{MF}{MD} = \frac{c}{a},\quad MF = \rho,\quad MD = \frac{a^2}{c} - c - \rho\cos\omega = \frac{b^2}{a} - \rho\cos\omega$$

$$\frac{MF}{MD} = \frac{c}{a} = \frac{\rho}{\frac{b^2}{c} - \rho\cos\omega} \Rightarrow \rho = \frac{b^2}{a} - \rho\frac{c}{a}\cos\omega \Rightarrow \rho\left(1 + \frac{c}{a}\cos\omega\right) = \frac{b^2}{a}$$

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\omega} = \frac{p}{1 + e\cos\omega}$$

donde p es el parámetro y e la excentricidad.

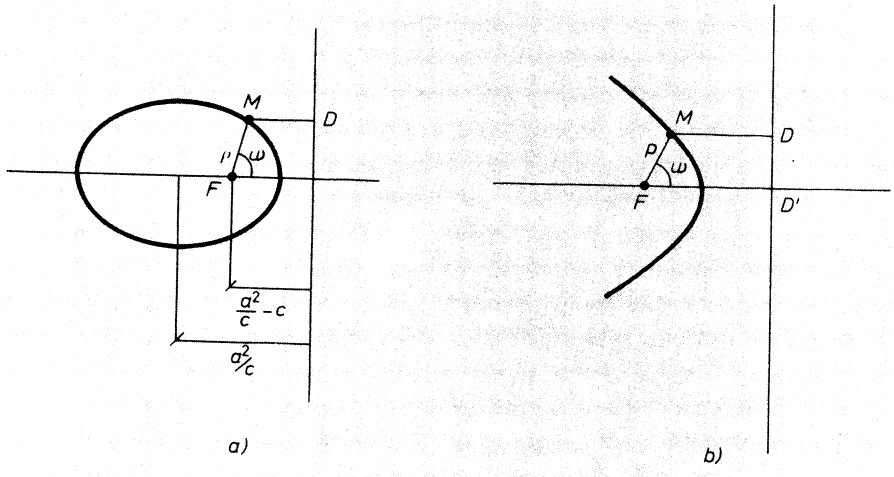


Fig. 9.9

b) Para la hipérbola, el mismo razonamiento; se obtiene la misma ecuación con la diferencia de que $e > 1$ en vez de $e < 1$.

c) Para la parábola resulta $\rho = \dfrac{p}{1 + \cos\omega}$, es decir, la misma ecuación con $e = 1$, como se deduce de la gráfica *b*) de la figura 6.56.

$$FD' = p = \rho\cos\omega + \rho$$

Resumiendo: La ecuación de una cónica en coordenadas polares cuando el polo coincide con el foco y el eje polar con el eje de simetría de la cónica es

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \omega}$$

donde

p = parámetro (ordenada de la x_F)
e = excentricidad

Esta ecuación representa:

Elipse si $e < 1$
Hipérbola si $e > 1$
Parábola si $e = 1$

9.6. SECCIONES DE UN CONO DE REVOLUCION

Si un cono de revolución, cuyo semiángulo cónico representamos por α, es cortado por un plano, su intersección será una cónica.

1.º Si el plano corta sólo a una hoja del cono la sección será una elipse.

2.º Si el plano es paralelo a una generatriz del cono la intersección será una parábola, que es un caso límite de la elipse.

3.º Si el plano corta a las dos hojas del cono su intersección será una hipérbola.

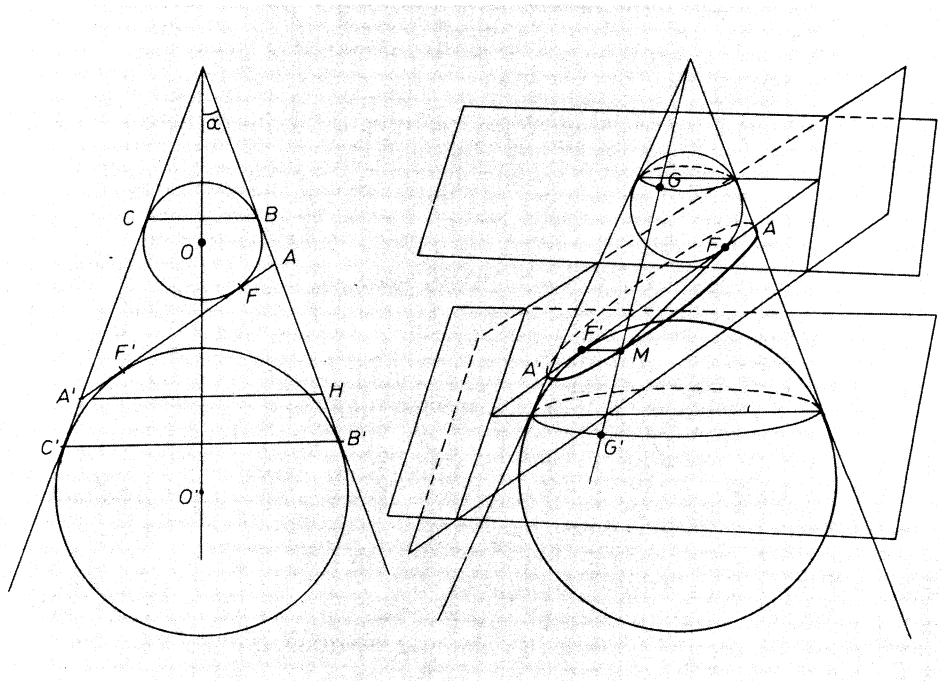


Fig. 9.10

En la derecha de la figura 6.57 puede verse un plano que corta a una hoja de un cono. Demostremos que la intersección es una elipse de focos F y F', que son los puntos de tangencia de las esferas inscritas.

$$\left.\begin{matrix} MF = MG \\ MF' = MG' \end{matrix}\right\} \text{ por ser tangentes desde el punto } M \text{ a la misma esfera}$$

$$MF + MF' = MG + MG' = GG' = CC'$$

Ahora bien, $CC' = A'C' + A'C = A'F' + A'F = AF + A'F = AA'$
luego

$$\boxed{MF + MF' = AA'}$$

o sea, el lugar del punto M es una elipse de focos F y F', y eje mayor AA'.

En la izquierda de la figura 9.10 se dibuja la sección por el plano que pasa por el eje del cono y es perpendicular al plano de la sección

$$AA' = CC' = BB'$$

$$FF' = AA' - AF - A'F' = BB' - AB - HB' = AH$$

Para situar una elipse en un cono dado, basta construir un triángulo $AA'H$ del que se conoce

$$\begin{aligned} AA' &= 2a, \text{ eje mayor de la elipse,} \\ AH &= 2c, \text{ distancia focal de la elipse,} \\ \widehat{AHA'} &= \frac{\pi}{2} - \alpha = \text{complemento del semiángulo cónico.} \end{aligned}$$

El problema siempre tiene solución, pues se trata de construir un triángulo conocidos dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Construido el anterior triángulo, queda determinado el ángulo que el plano de la sección ha de formar con el eje del cono para que la sección sea la elipse dada.

Análogamente se demuestran los otros casos de sección hipérbola y parábola, que no se desarrollan en favor de una extensión adecuada.

9.7. CURVAS POLINOMICAS

Se llaman curvas polinómicas aquellas cuya ecuación es un polinomio. Es costumbre llamarlas también curvas *parabólicas* como generalización de la parábola de segundo grado. Así, resulta

$y = a_0x^2 + a_1x + a_2$, parábola de segundo grado
$y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, parábola de tercer grado
$y = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, parábola de cuarto grado
. . . . . .
$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, parábola de grado enésimo

— Una recta $y = k$, paralela al eje x, corta a la parábola de grado n en n puntos. Las abscisas de estos n puntos se obtienen resolviendo la ecuación de grado n

$$k = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

La ecuación tiene n raíces que pueden ser reales o imaginarias. Sabemos que siempre que tenga una raíz imaginaria tendrá su conjugada, y que algunas raíces pueden coincidir (raíces múltiples).

— Al estudiar la continuidad se vio que toda curva polinómica del tipo anterior era una función continua.

– Para $x \to \infty$, las funciones polinómicas son infinitos equivalentes al término de mayor grado.

En efecto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{a_0x^n} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0x^n}\right) = 1$$

Luego el comportamiento para x infinitamente grande es análogo al de a_0x^n. Por ello basta estudiar $y = a_0x^n$ para conocer la posición en el infinito. La curva $y = a_0x^n$ es de la forma

1.º) *n par*

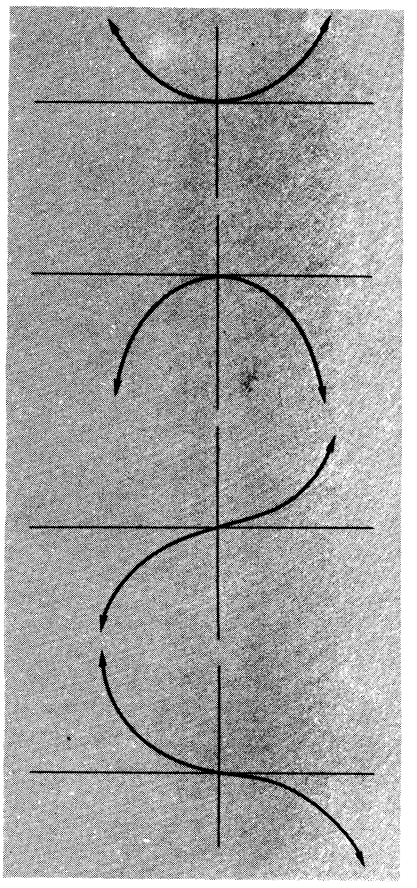
$a_0 > 0$ { $x \to +\infty$ $y \to +\infty$; $x \to -\infty$ $y \to +\infty$

$a_0 < 0$ { $x \to +\infty$ $y \to -\infty$; $x \to -\infty$ $y \to -\infty$

2.º) *n impar*

$a_0 > 0$ { $x \to +\infty$ $y \to +\infty$; $x \to -\infty$ $y \to -\infty$

$a_0 < 0$ { $x \to +\infty$ $y \to -\infty$; $x \to -\infty$ $y \to +\infty$



. Fig. 9.11

Si $y = a_0x^n$, $n \geq 2$ la y tiende a ∞ más rápidamente que la x por ser la y un infinito de orden $n \geq 2$, y la x un infinito de orden 1; por ello decimos que la curva tiene en el infinito una *rama parabólica* de dirección y.

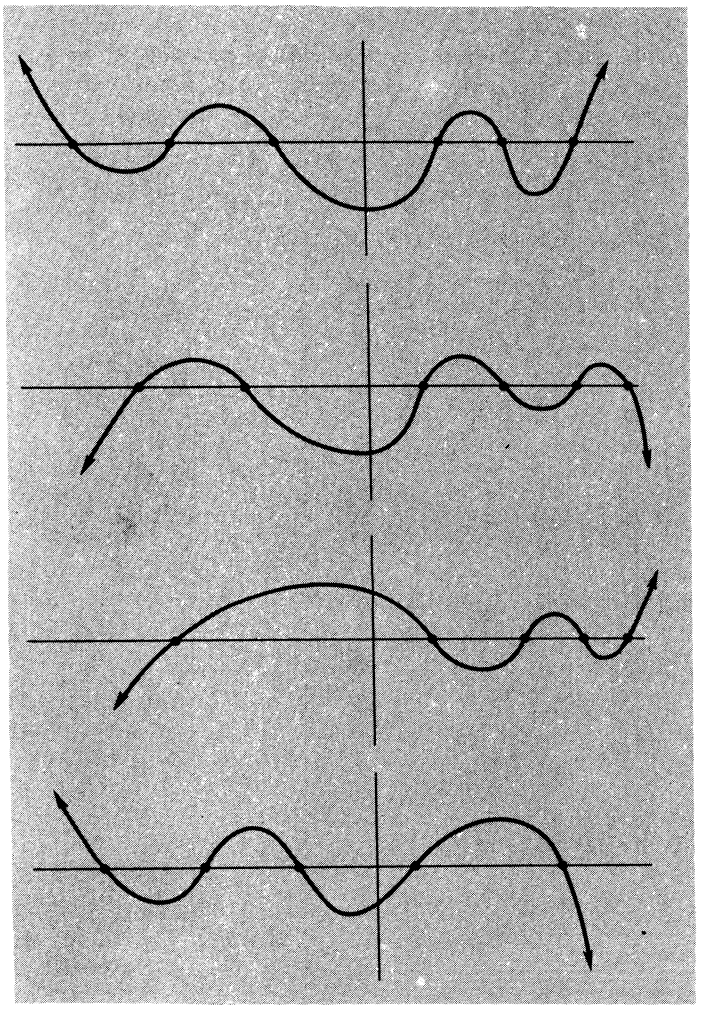
En el caso de $y^2 = ax$ la rama sería parabólica de dirección x, pues la x tiende a ∞ más rápidamente que la y.

Forma de la gráfica de $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

Es fácil dibujarla sabiendo lo siguiente:

1.º Es continua.
2.º Corta al eje x en n puntos reales o imaginarios (por pares conjugados).
3.º Posición para $x \to \infty$.

Veamos distintos casos, suponiendo que los puntos de corte con el eje x son reales y distintos.



n par, $a_0 > 0$

(Está dibujada para $n = 6$, pues corta al eje x en seis puntos.)

n par, $a_0 < 0$

n impar, $a_0 > 0$

(Está dibujada para $n = 5$, pues corta el eje x en cinco puntos.)

n impar, $a_0 < 0$

Fig. 9.12

Para completar el dibujo se hallan, si se puede (al menos aproximadamente), los máximos y mínimos, las inflexiones y las tangentes en los puntos de corte con los ejes. Además, siempre es aconsejable un cuadro de valores.

Ejercicios

1) Dibújese $y = (x - 1)^2(x + 2)(-x + 5)$.
2) Dibújese una curva de sexto grado que tenga una raíz doble, y dos imaginarias conjugadas.
3) Dibújese una curva de cuarto grado que tenga una raíz triple.

9.8. CURVAS EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

Estas curvas son las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica. Estas funciones requerirían un estudio muy completo del cual prescindimos para limitarnos únicamente a recordar sus gráficas*.

La *función exponencial* es $y = a^x$, $a > 0$ (Fig. 9.13).

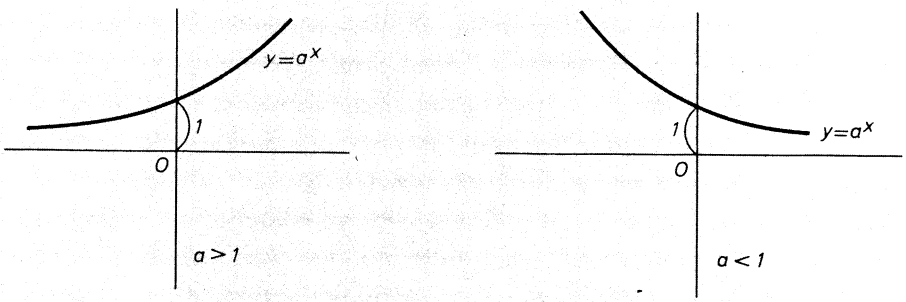


Fig. 9.13

Conocida la función exponencial con una base cualquiera es inmediato determinarla con otra base (Fig. 6.61). En efecto, si conocemos la exponencial $y = e^x$, vamos a determinar $y = a^x$.

$$\frac{PQ_1}{PQ} = \frac{1}{La} \Rightarrow PQ_1 = \frac{PQ}{La}$$

Para construir la curva a^x basta trazar paralelas al eje x que cortarán a e^x en puntos Q; llevando $PQ_1 = \frac{PQ}{La}$, se obtienen puntos de a^x.

* Un estudio muy completo de la función exponencial y logarítmica puede verse en *Elementos de Matemática*, del profesor Abellanas. Un estudio muy didáctico y, tal vez, más asequible puede encontrarse en el capítulo 3 de *Cálculus*, de Apóstol.

$y = e^x$
$y = a^x = e^{xLa}$

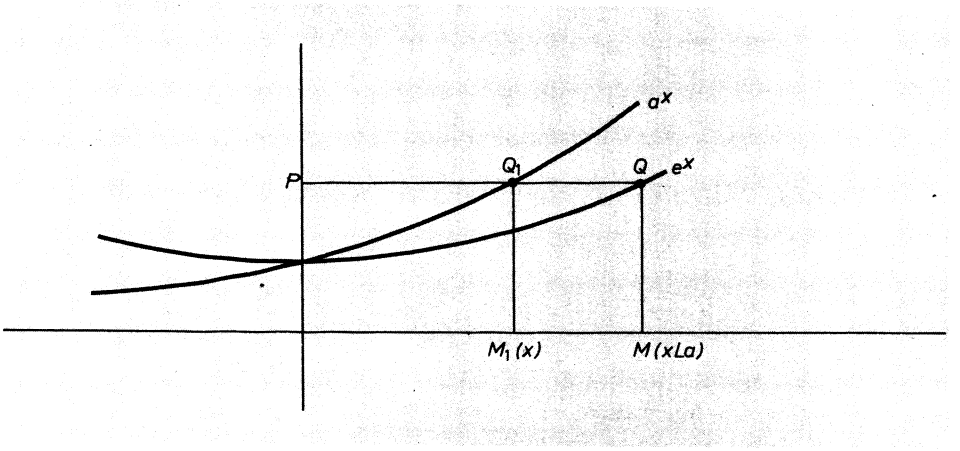


Fig. 9.14

La *función logarítmica* es la inversa de la función exponencial

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Como a la variable independiente se acostumbra a llamarla x, resulta $y = \log_a x$, que será simétrica, respecto a la primera bisectriz, de la función exponencial (Fig. 9.15).

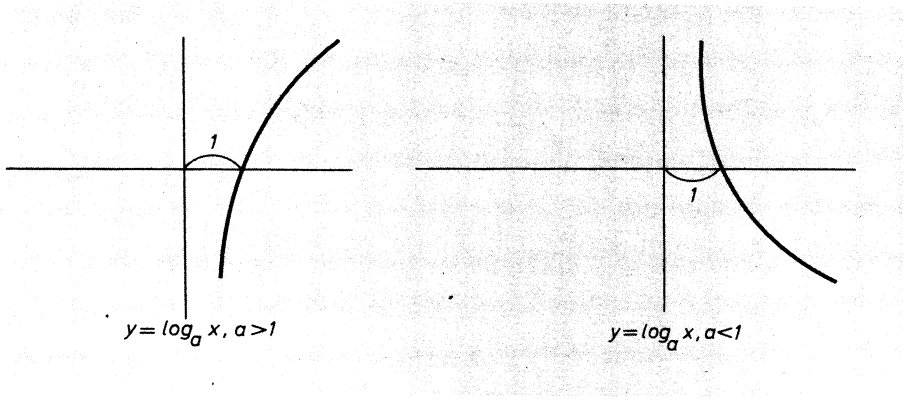


Fig. 9.15

Conocida una gráfica logarítmica, por ejemplo, los logaritmos neperianos, se puede construir otra gráfica, por ejemplo, $y = \log_a x$.

$$\log_a x = \frac{Lx}{La} \qquad PQ_1 = \frac{PQ}{La}$$

Basta trazar paralelas al eje y que cortarán a Lx en puntos Q, y llevar $PQ_1 = \dfrac{PQ}{La}$ determinando los puntos Q_1 de $\log_a x$ (Fig. 9.16).

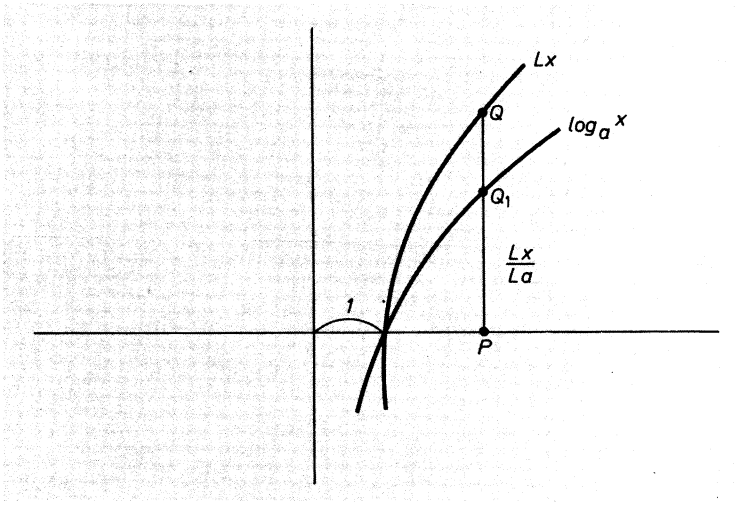


Fig. 9.16

9.9. CURVAS CORRESPONDIENTES A LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

Las funciones hiperbólicas están en estrecha relación con la función exponencial $y = e^x$.

Coseno hiperbólico

$$y = \text{Ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$PQ_1 = \frac{PQ + PQ'}{2} \qquad Q_1 = \text{punto medio de } QQ'$$

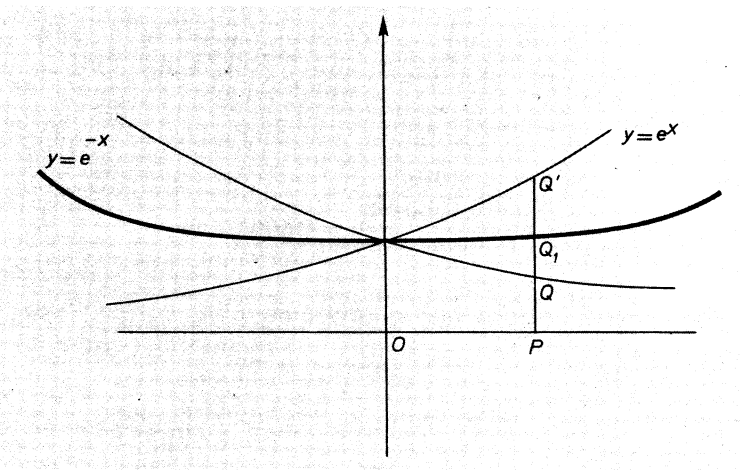


Fig. 9.17

Seno hiperbólico

Restando gráficamente los puntos $y = e^x$, $y = e^{-x}$ obtenemos la de trazo a rayas $y = e^x - e^{-x}$.

A partir de la curva de trazos obtenemos Sh x tomando para cada x la mitad de la ordenada.

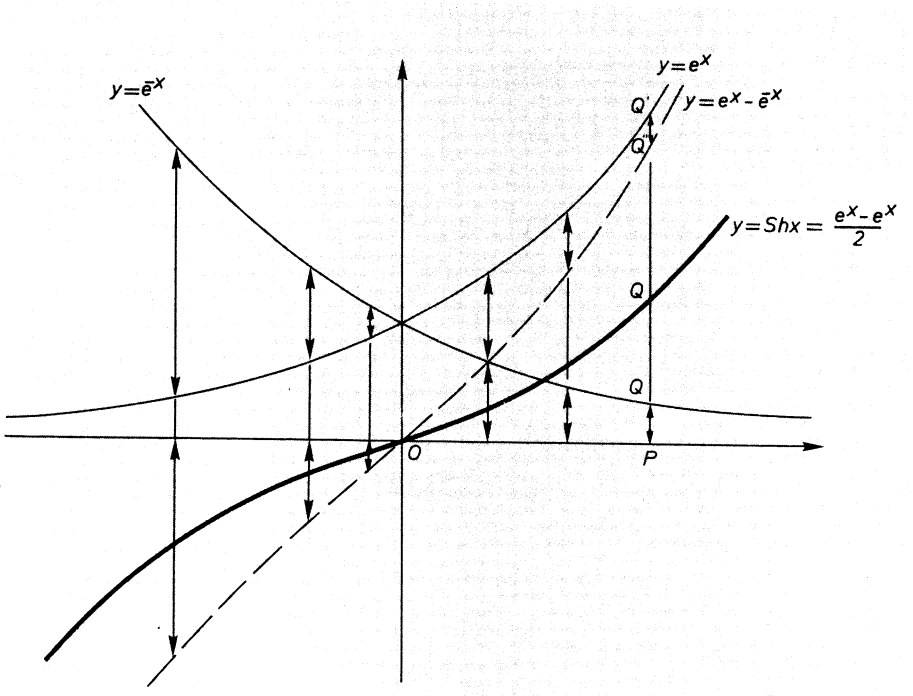


Fig. 9.18

$$Q'Q'' = PQ;\ PQ'' = PQ' - PQ;\ PQ_1 = \frac{PQ' - PQ}{2} = \frac{PQ''}{2}$$

Tangente hiperbólica

$$y = \text{Th } x = \frac{\text{Sh } x}{\text{Ch } x}$$

Basta dividir gráficamente el Sh x y Ch x que ya hemos dibujado.

También se puede dibujar a partir de $y = \text{Th } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, que se ve es simétrica respecto al origen, con asíntotas $y = \pm 1$ y pasa por (0, 0); además es creciente en todo punto.

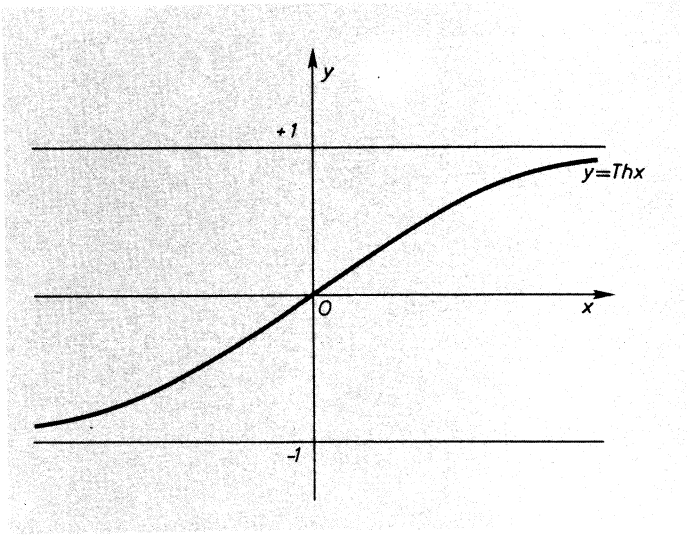


Fig. 9.19

Las tres funciones hiperbólicas que siguen son las inversas de las anteriores.

Secante hiperbólica

$$y = \text{Sech } x = \frac{1}{\text{Ch } x}$$

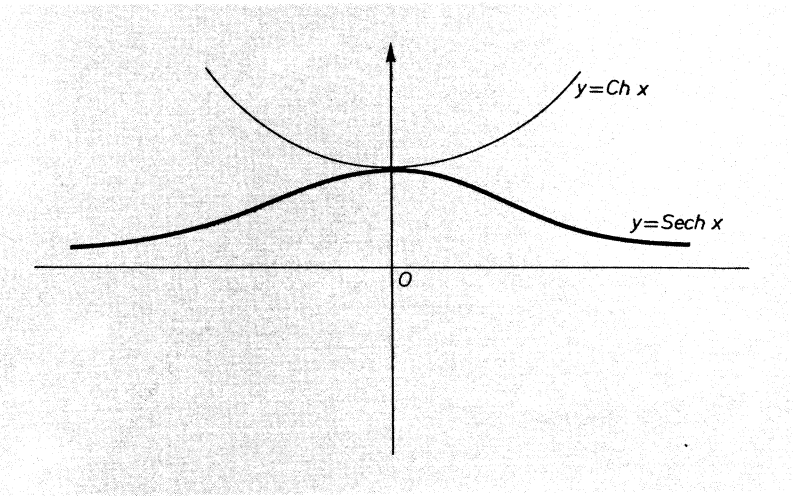


Fig. 9.20

Cosecante hiperbólica

$$y = \text{Cosech } x = \frac{1}{\text{Sh } x}$$

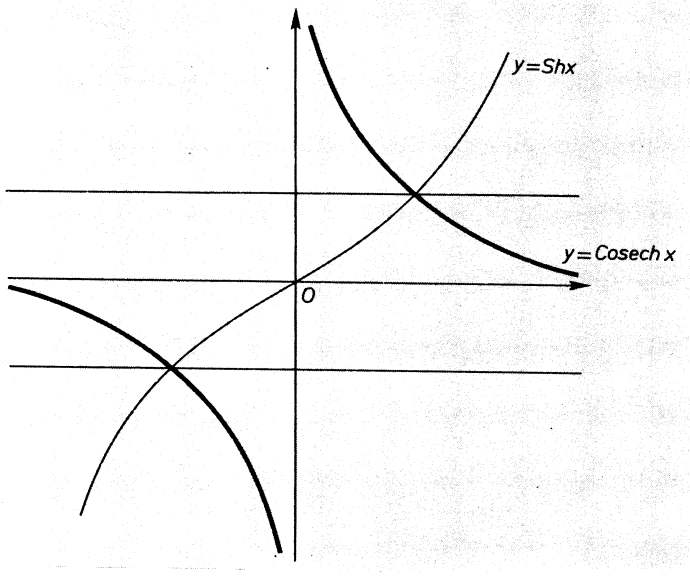


Fig. 9.21

Cotangente hiperbólica

$$y = \text{Cth } x = \frac{1}{\text{Th } x}$$

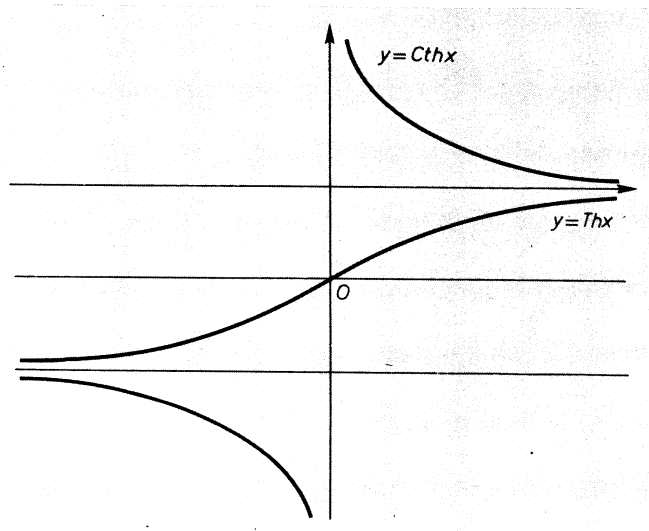


Fig. 9.22

9.10. CURVAS TRIGONOMETRICAS

Vamos a recordar las gráficas de las funciones trigonométricas para completar el estudio de las curvas elementales.

$$y = \text{sen } x$$

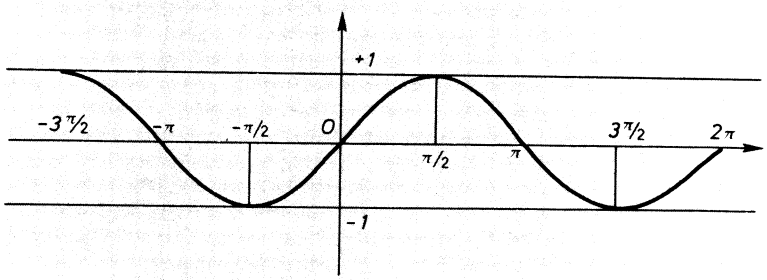


Fig. 9.23

$$y = \cos x$$

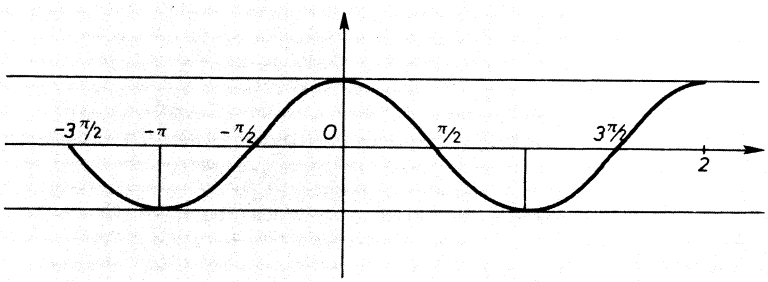


Fig. 9.24

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

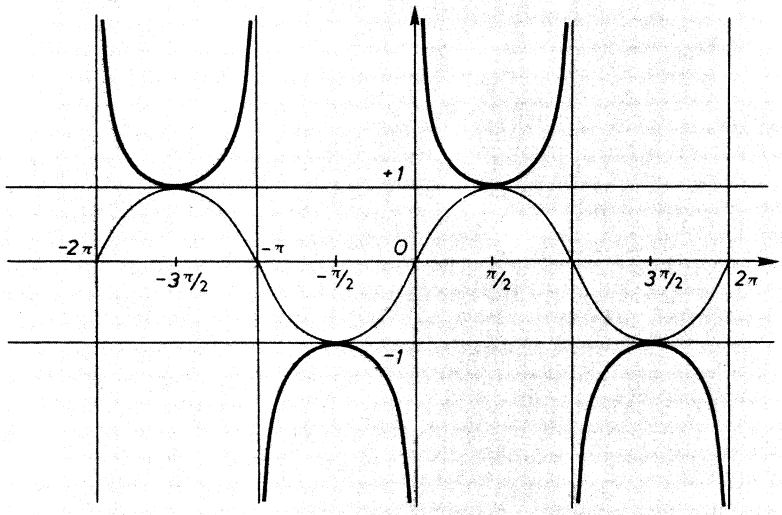


Fig. 9.25

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

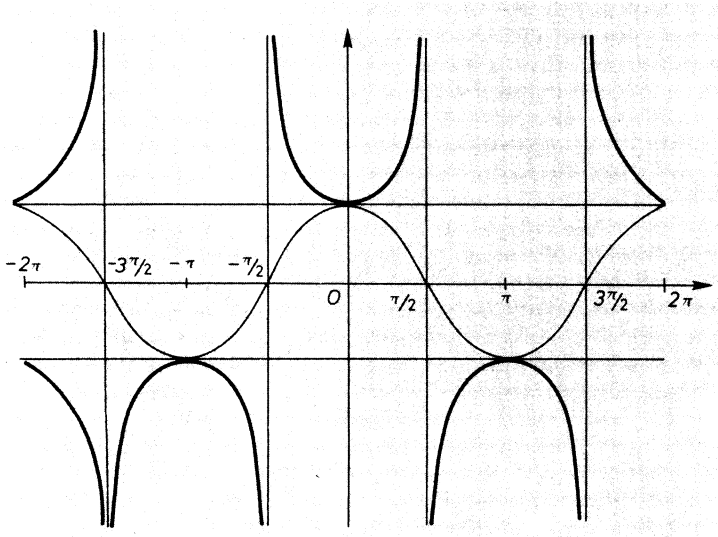


Fig. 9.26

$$y = \operatorname{tg} x$$

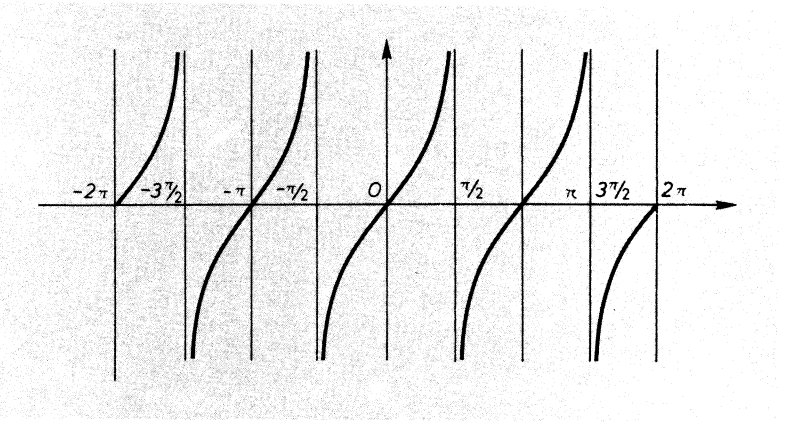


Fig. 9.27

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

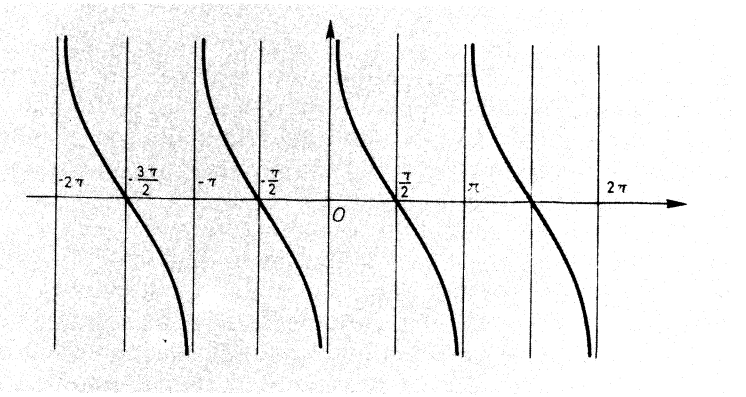


Fig. 9.28

9.11. CURVAS. DEFINICION

Se pretende en este epígrafe dar precisión al concepto de curva del que hasta ahora se tiene una idea intuitiva. Son curvas todas las que se acaban de estudiar.

Para entender el concepto de curva es conveniente recurrir al concepto físico de trayectoria de un punto móvil (Fig. 9.29).

Supóngase que en un instante t_1 un punto móvil ocupa la posición M_1, y que se mueve hasta ocupar la posición M_2 en un instante t_2.

Durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ ha recorrido la trayectoria M_1M_2. En cada instante t del intervalo $[t_1, t_2]$ ha ocupado una posición intermedia. Se dice que el movimiento del punto móvil está definido si se conoce en cada instante «t» la posición que ocupa.

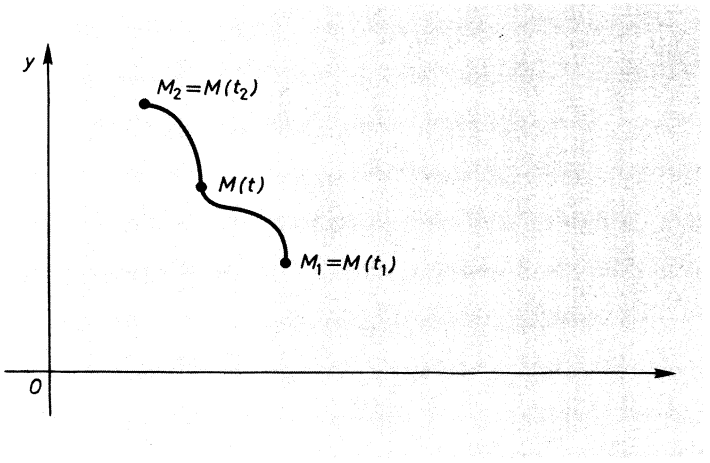


Fig. 9.29

Ahora bien, la posición de un punto viene determinada por sus coordenadas (x, y), luego cada movimiento estará determinado si se conocen en cada instante «t» las (x, y), es decir, si x e y son ciertas funciones conocidas de t

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}, \text{ para } t \in [t_1\ t_2]$$

El intervalo de tiempo $[t_1\ t_2]$ es un intervalo de la recta real o sea un segmento.

La trayectoria es la imagen de una aplicación del segmento de recta $[t_1\ t_2]$ en el plano euclídeo E_2, pues a cada $t \in [t_1\ t_2]$ corresponde un punto único de coordenadas $(\varphi(t), \psi(t))$. Pero es más; esta aplicación es continua, en el sentido de que a dos puntos t', t'' muy próximos de $[t_1\ t_2]$ corresponden dos posiciones M', M'' muy próximas de la trayectoria.

Lo esencial del concepto de curva es que es una *aplicación* de un segmento de recta en el plano; y que esta aplicación es continua.

Sin embargo, una aplicación continua de un segmento en E_2 puede no representar una «curva» de acuerdo con la noción intuitiva que se tiene de este término.

Peano demostró que existen aplicaciones continuas de un segmento de recta en el plano, que pasan por todos los puntos de un cierto rectángulo, es decir, que tienen un área. Esto está en contradicción con lo que se entiende vulgarmente por curva. Es necesario establecer la condición de regularidad (total o a trozos), como se verá a continuación.

Continuemos con el estudio de la trayectoria de un móvil.

En el movimiento de un vehículo no se producen giros bruscos en la trayectoria, luego las funciones que la definen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, además de ser continuas tienen derivada continua.

Una curva se dice que es *regular* cuando la aplicación es derivable o sea $(\varphi(t), \psi(t))$ son derivables; o lo que es lo mismo, *cuando la tangente a la curva varía con continuidad.*

Si la aplicación es derivable excepto en un número finito de puntos de $[t_1, t_2]$ se dice que es *regular a trozos.* Cada uno de los trozos en los que es regular se llama *arco de curva.*

Puede decirse que las curvas o son regulares o son regulares a trozos, es decir, compuestas por arcos de curva y sus puntos de acumulación.

Vamos a seguir estudiando los tipos de curvas, recurriendo al modelo del móvil.

Puede suceder que en su trayectoria el móvil no vuelva a pasar por puntos que ya pasó, es decir que la aplicación sea inyectiva. En este caso la curva se dice *simple*.

Si los puntos inicial y final no coinciden o sea $M_1 \neq M_2$, se llama *curva no cerrada*.

Si la trayectoria cierra un circuito, es decir, si la posición final coincide con la inicial, $M_1 \equiv M_2$, la curva se llama *cerrada*.

Por lo tanto, se tienen los siguientes casos:

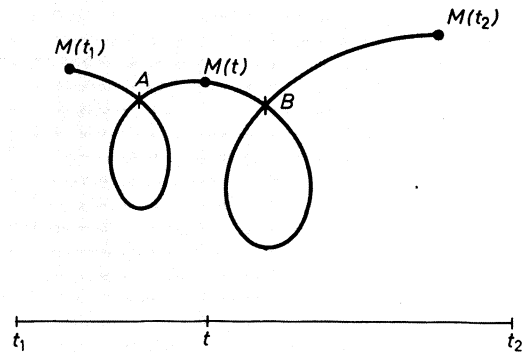


Fig. 9.30

Curva general no cerrada

$$[t_1\ t_2] \longrightarrow E_2$$
$$t \longrightarrow M(t)$$

aplicación *no* inyectiva

$$\left.\begin{matrix} t'_A \longrightarrow A \\ t''_A \longrightarrow A \end{matrix}\right\} t'_A \neq t''_A$$

$$\left.\begin{matrix} t'_B \longrightarrow B \\ t''_B \longrightarrow B \end{matrix}\right\} t'_B \neq t''_B$$

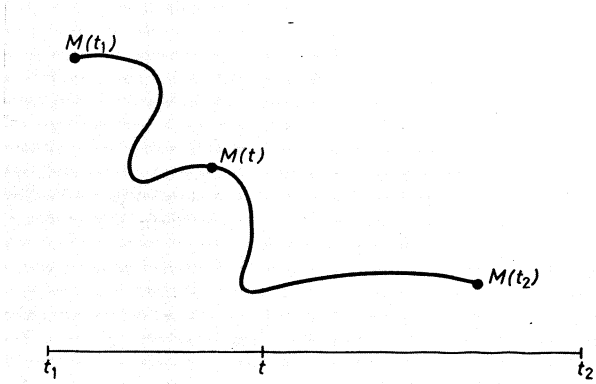


Fig. 9.31

Curva simple no cerrada

$$[t_1\ t_2] \longrightarrow E_2$$
$$t \longrightarrow M(t)$$

aplicación inyectiva

o sea, $M(t') = M(t'') \Rightarrow t' = t''$

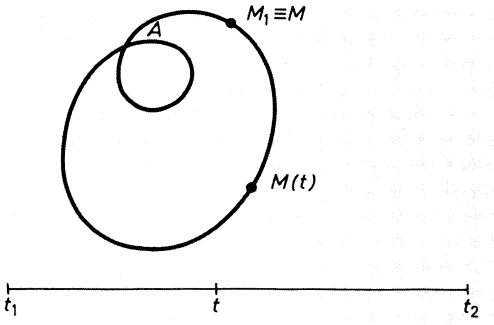


Fig. 9.32

Curva cerrada normal

$$[t_1\ t_2] \longrightarrow E_2$$
$$t \longrightarrow M(t)$$

aplicación *no* inyectiva

$$\left.\begin{matrix} t'_A \longrightarrow A \\ t''_A \longrightarrow A \end{matrix}\right\} t'_A \neq t''_A$$

$$M(t_1) = M(t_2)$$

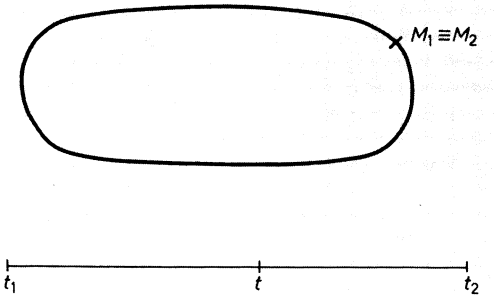


Fig. 9.33

Curva cerrada simple
(o curva de Jordan)

$$[t_1\ t_2] \longrightarrow E_2$$
$$t \longrightarrow M(t)$$

aplicación inyectiva

$$M(t') = M(t'') \Rightarrow t' = t''$$
$$M(t_1) = M(t_2)$$

Todas las curvas que se han visto son regulares. Ahora establezcamos ejemplos de curvas *regulares a trozos.*

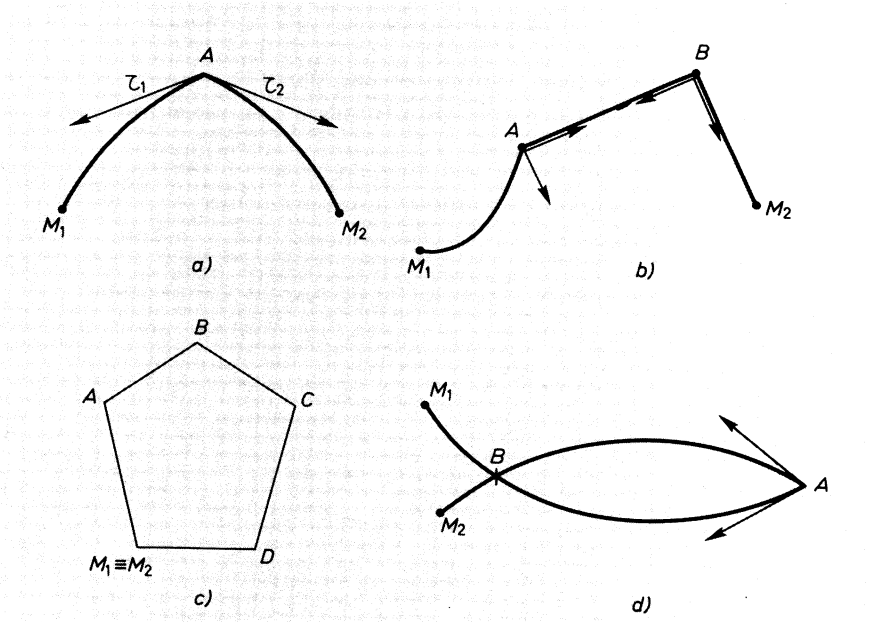


Fig. 9.34

1.º Curva simple no cerrada (Fig. 9.34, *a*).
En el punto A existe una discontinuidad o salto de la tangente, representado por las tangentes no coincidentes τ_1, τ_2 a izquierda y derecha respectivamente
El trozo $\widehat{M_1A}$ es regular, así como el trozo $\widehat{AM_2}$.

2.º Curva simple no cerrada (Fig. 9.34, *b*).
En los puntos A y B hay discontinuidades o saltos de la tangente.
Los trozos $\widehat{M_1A}$, $\widehat{AB}$, $\widehat{BM_2}$ son regulares.

3.º Polígono; curva cerrada simple (Fig. 9.34, *c*).

En los puntos *ABCDM* hay discontinuidades o saltos de la tangente.

Los trozos M_1A, AB, BC, CD, DM_2 son regulares (o sea los lados del polígono).

4.º Curva no cerrada (Fig. 9.34, *d*).

El punto *A* es un punto de discontinuidad o salto de la tangente.

Los trozos M_1A, AM_2 son regulares.

Cuando en una curva no se incluye algún extremo o los dos extremos, se conviene en llamarla *abierta* por el extremo correspondiente. Esta denominación no tiene relación con la de curva cerrada, que hemos dado anteriormente.

9.12. CURVAS Y GRAFICAS DE FUNCIONES

Intentemos dejar bien clara la distinción entre *curva* y *gráfica de una función.*

Una función es una aplicación y por lo tanto a cada valor de la x corresponde un valor *único* de la $f(x)$, luego la gráfica será tal que cualquier recta paralela al eje y la corta a lo sumo en un punto.

Toda gráfica de función continua es una curva. Una gráfica de función con puntos de discontinuidad aislados está formada por varias funciones continuas, cada una de las cuales es una curva.

Luego toda gráfica de función continua o con puntos aislados de discontinuidad es una curva o un conjunto de curvas respectivamente.

Una curva en general no es una función sino una «colección de funciones» a la que habíamos convenido en llamar «función multiforme»; y a cada una de las funciones que la componen, «ramas» de la función multiforme.

Ejemplos aclaratorios:

1.º) Gráfica de función continua que es una *curva regular* (también llamada arco de curva). (Fig. 9.35).

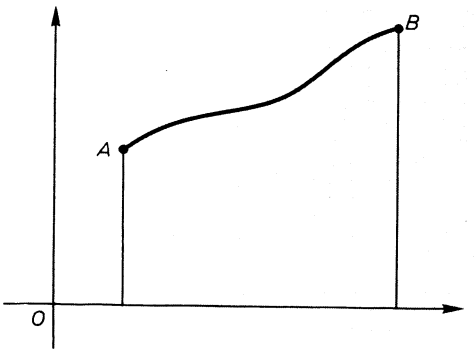


Fig. 9.35

2.º) Gráfica de función continua que es una curva *regular a trozos*, pues el punto *C* tiene dos tangentes o sea, es anguloso. Cada uno de los trozos $\widehat{AC}$, $\widehat{CB}$ es un arco de curva (o curva regular). (Fig. 9.36).

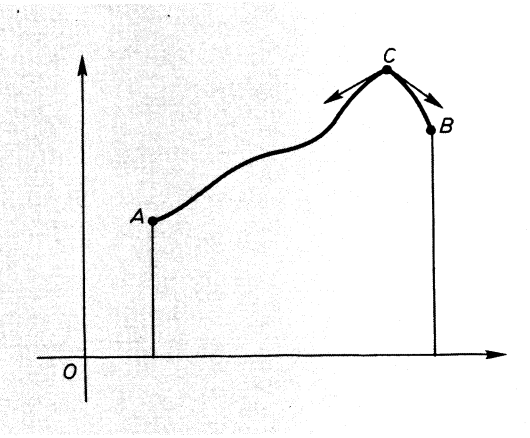


Fig. 9.36

3.º) Gráfica de función discontinua con puntos de discontinuidad aislados que está formada por *tres curvas* (Fig. 9.37):

1. $\widehat{AB}$ curva regular.
2. $\widehat{CDE}$ curva regular a trozos formada por los arcos de curva CD y DE.
3. $\widehat{FG}$ curva regular.

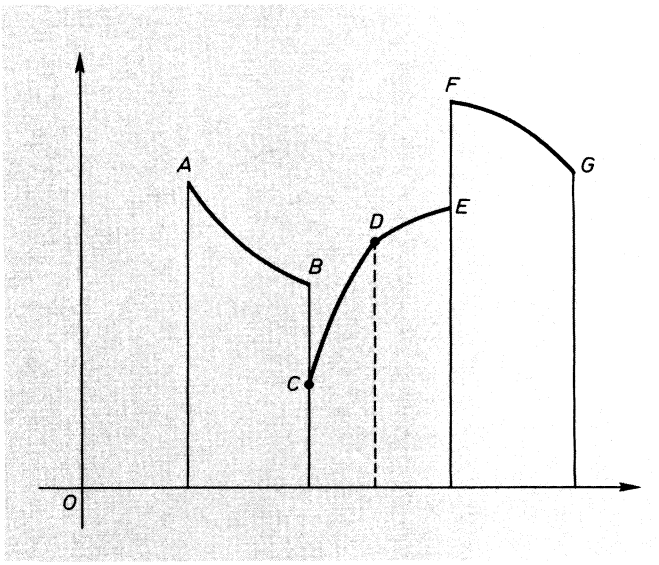


Fig. 9.37

4.º) Gráfica de función multiforme formada por las tres funciones o ramas, I, II y III (Fig. 9.38).

Este conjunto de funciones representa una sola *curva regular*.

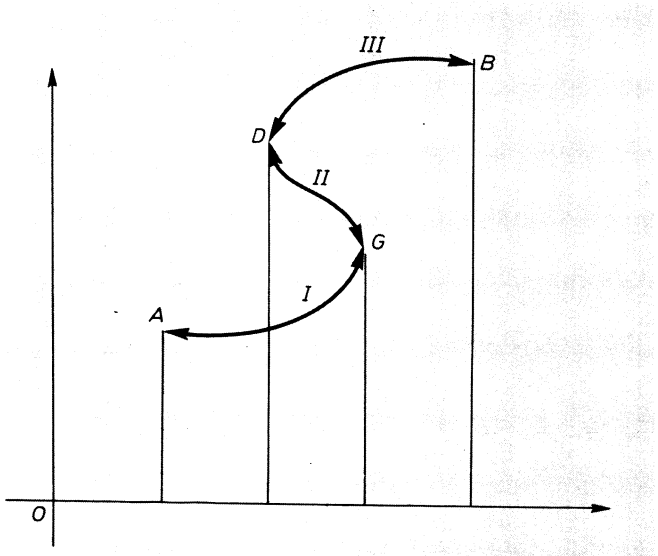


Fig. 9.38

5.º) Gráfica de función multiforme formada por las ramas I, II y III (Fig. 9.39). Este conjunto de funciones o ramas representa una curva *regular a trozos.*

Los trozos de que está formada son los arcos de curva $\widehat{AE}$ y $\widehat{EB}$.

El estudio del movimiento de un punto ha servido para establecer el concepto de curva. Se ha visto que era una aplicación continua y derivable (al menos a tro-

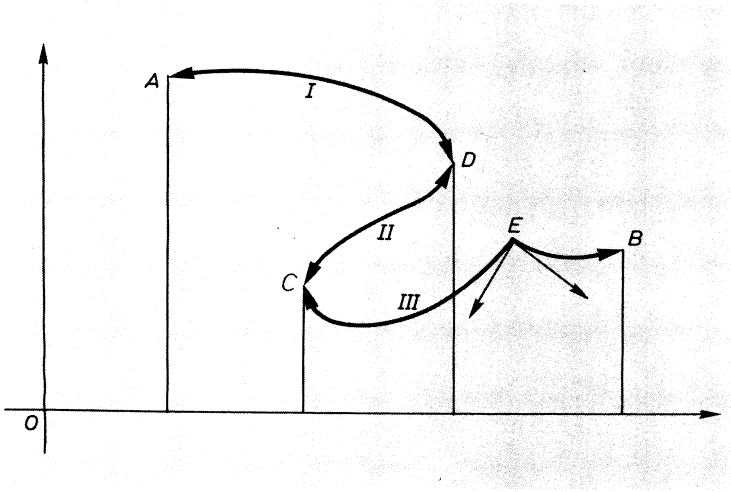


Fig. 9.39

zos) de un intervalo de la recta real en el plano euclídeo E_2. Esta aplicación está determinada por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}$$ que se denominan *ecuaciones paramétricas de la curva.*

Estas expresiones comprenden como caso particular la expresión cartesiana explícita de una función que, como quedó dicho, también es curva (o conjunto de curvas) pues $y = f(x)$ puede escribirse

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = f(t) \end{array}\right\}$$

Si se hubieran utilizado coordenadas polares se hubiese obtenido

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = \varphi(t) \\ \rho = \psi(t) \end{array}\right\},$$

sirviendo las mismas definiciones. La expresión polar $\rho = f(\omega)$ queda incluida en la expresión anterior, para el caso particular

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = t \\ \rho = f(t) \end{array}\right\}$$

9.13. CONCEPTO DE CURVATURA. CENTRO Y RADIO

Supóngase un alambre recto de material flexible, por ejemplo, cobre (Fig. 9.40). Se marcan en el alambre dos puntos A, B a la distancia ΔS. Si se dobla hasta tomar

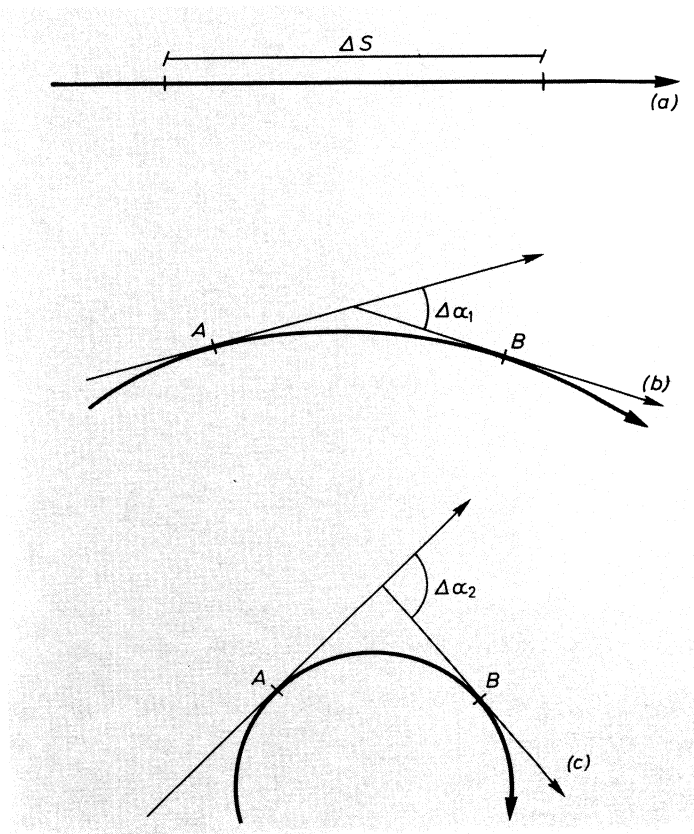


Fig. 9.40

la forma que se aprecia en (*b*), el ángulo que forman las tangentes en A y B respectivamente es $\Delta\alpha_1$. Si se dobla más todavía, hasta que tome la forma (*c*) y se mide el ángulo que forman las tangentes en A y B, resulta ser

$$\Delta\alpha_2 > \Delta\alpha_1.$$

Es decir, si se mantienen los puntos A y B fijos sobre el alambre, «cuanto mayor sea el grado de doblamiento mayor será el ángulo que forman las tangentes en A y B".

Vamos a proceder ahora en sentido contrario (Fig. 9.41). Fijamos las tangentes de manera que formen un ángulo $\Delta\alpha$, y vamos deformando el alambre y adaptándolo a las tangentes fijas, midiendo cada vez la longitud.

$$\overset{\frown}{AB} = \Delta S,\ \overset{\frown}{A_1B_1} = \Delta S_1,\ \overset{\frown}{A_2B_2} = \Delta S_2 \text{ etc.}$$

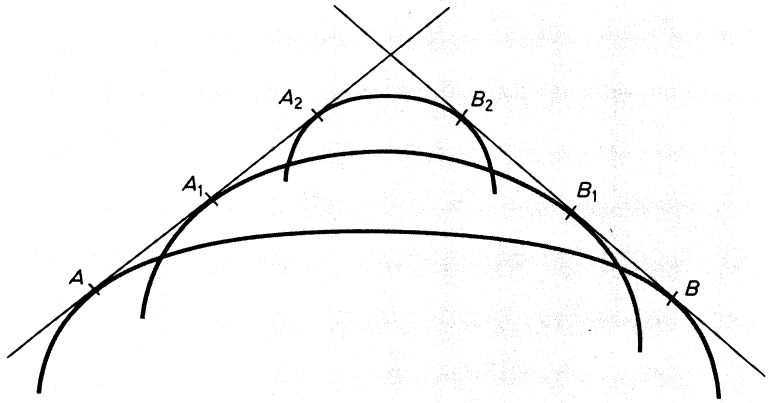


Fig. 9.41

Se observa que «cuanto mayor sea el grado de doblamiento menor será la longitud del arco entre puntos de contacto».

Estas consideraciones llevan a establecer las siguientes definiciones:

$$\overset{\frown}{AB} = \Delta S$$

Curvatura media del arco $\overset{\frown}{AB} = C_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta S}$ (Fig. 9.42)

La *curvatura en un punto A* será lógicamente el límite de la curvatura media de un arco $\overset{\frown}{AB}$ cuando la longitud del arco tiende a cero, o sea cuando $B \to A$.

$$C_A = \lim_{B\to A} C_{\overset{\frown}{AB}} = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = \frac{d\alpha}{dS}$$

Por definición, *radio de curvatura en un punto* $A = R_A = \dfrac{1}{C_A}$, luego $C_A = \dfrac{1}{R_A}$.

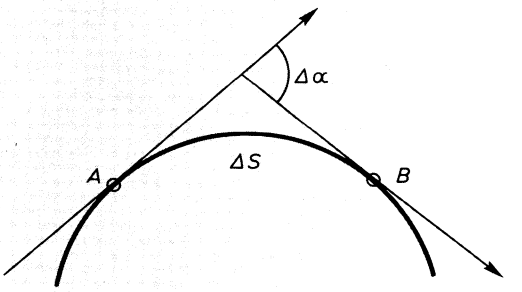


Fig. 9.42

Si sobre la perpendicular a la tangente llevamos del mismo lado que la curva la longitud R_A (Fig. 9.43), se obtiene el punto K_A que se define como *centro de curvatura.*

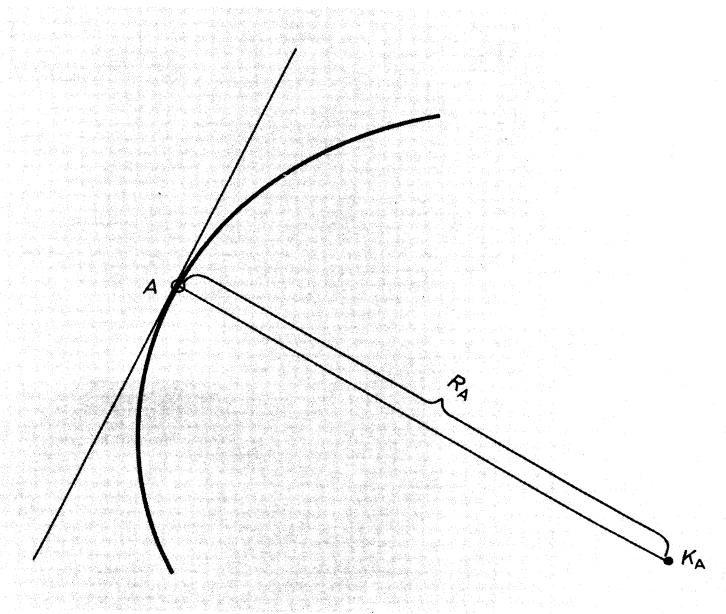


Fig. 9.43

Al variar A sobre la curva variará K_A. La curva que describe K_A se denomina *evoluta* de la curva dada.

Círculo de curvatura es el círculo de centro K_A y de radio R_A.

9.14. CALCULO DE LA CURVATURA. COORDENADAS DEL CENTRO

Sobre la figura 9.44 se calcula:

$$\alpha = \operatorname{artg} y' \quad ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$C_A = \frac{d\alpha}{dS} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{\dfrac{d\alpha}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}} = \frac{\dfrac{1}{1 + y'^2} y''}{(1 + y'^2)^{1/2}} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

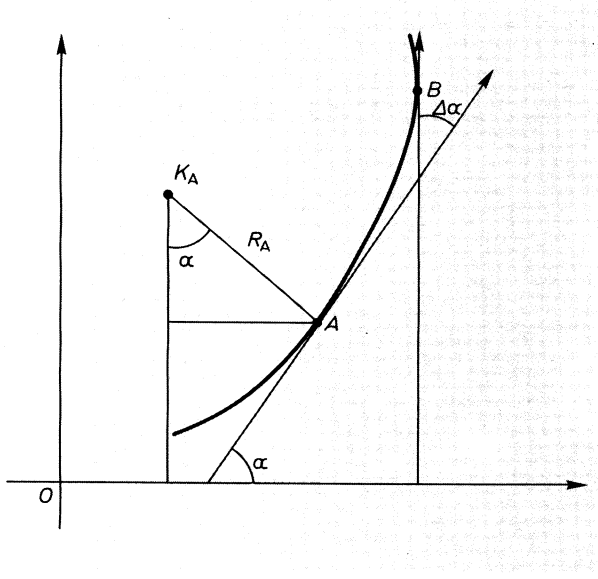


Fig. 9.44

$$R_A = \frac{1}{C_A} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

$$X_{K_A} = X_A - R_A \operatorname{sen} \alpha = X_A - \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = X_A - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}$$

$$Y_{K_A} = Y_A + R_A \cos \alpha = Y_A + \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}} = Y_A + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

Si la curva viene expresada en forma paramétrica,

$$\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right\},$$

basta sustituir en las fórmulas anteriores los valores de y', y'' que se indican a continuación:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}$$

Deduzcamos ahora la expresión de la curvatura en coordenadas polares, para lo cual vamos a establecer primero el valor del ángulo V que forma la tangente con el radio del vector.

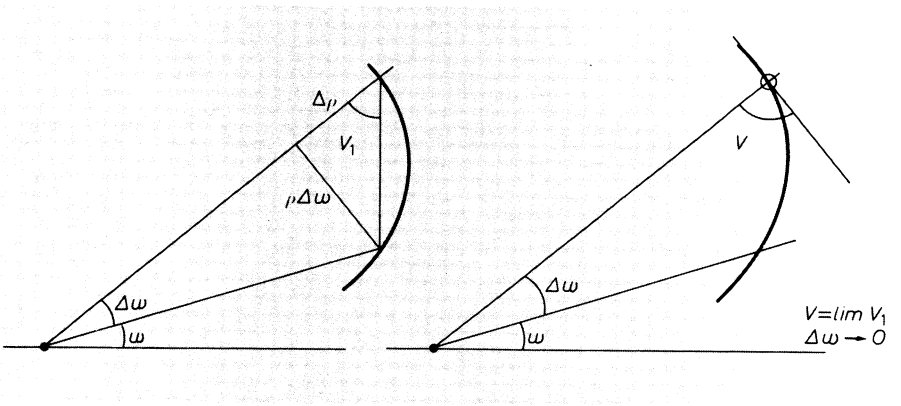


Fig. 9.45

$$\operatorname{tg} V_1 = \frac{\rho\,\Delta\omega}{\Delta\rho} = \frac{\rho}{\frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}}$$

$$\left[\operatorname{tg} V = \lim_{\Delta\omega\to 0} \operatorname{tg} V_1 = \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{\rho}{\frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}} = \frac{\rho}{\rho'}\right]$$

Con este antecedente, puede deducirse la curvatura

$$\alpha = V + \omega \qquad V = \operatorname{artg}\frac{\rho}{\rho'} \qquad ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\omega$$

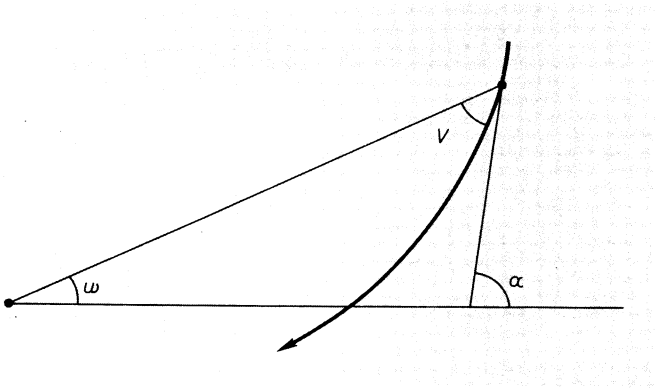


Fig. 9.46

$$C_A = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dfrac{d\alpha}{d\omega}}{\dfrac{ds}{d\omega}} = \frac{1 + \dfrac{1}{1 + \rho^2/\rho'^2}\dfrac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2}}{(\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}}$$

Dedúzcanse, como ejercicio, las coordenadas del centro de curvatura.

9.15. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. Determínese la ecuación de la recta que pasa por $A(\rho = 3, \omega = 45^o)$ y $B(\rho = 5, \omega = 30^o)$.
2. Calcúlese la ecuación de la circunferencia de centro C $(\rho_0 = 2, \omega_0 = \pi/2)$ y de radio $r = 3$.
3. Escríbase la ecuación de la elipse $2x^2 + 3y^2 = 6$ en forma polar.
4. Dibújese la curva $y = 5(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
5. Dibújese la parábola $y = 6x^2 - 5x + 4$.
6. Hállense las coordenadas del centro y radio de curvatura de $y = 3x^2 - 7x + 4$ en $x = 1$.
7. Hállense las coordenadas del centro y radio de curvatura de $\rho = \omega^2 - 2\omega$ en $\omega = \pi/3$.
8. Determínese la curvatura de $y = Lx$ en $x = 2$.
9. Dibújese la curva logarítmica decimal a escala. A partir de ella, por método gráfico, dibújese $y = \log_3 x$.
10. Dibújese $y = -x^3 + 2x^2 - 8x$.

10

Idea elemental de superficies. Curvas alabeadas

10.1. INTRODUCCION. REFERENCIAS DE COORDENADAS CILINDRICAS Y ESFERICAS

Vamos a considerar como espacio en el que se estudian las superficies y curvas alabeadas del presente capítulo el espacio tridimensional euclídeo E_3. Se sabe que en tal espacio se puede definir una referencia de coordenadas cartesianas $R = \{O; \bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3\}$ que permite identificar cada punto con una terna ordenada de números reales, sus coordenadas $(x_1\ x_2\ x_3)$; es decir, existe una biyección

$$\begin{aligned} E_3 &\longrightarrow \mathfrak{R}^3 \\ X &\longrightarrow (x_1\ x_2\ x_3) \end{aligned}$$

Por comodidad, elegiremos una referencia ortonormal o sea $\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker), como es habitual. Los ejes de coordenadas y, por lo tanto, las coordenadas de un punto se designarán (x, y, z) en vez de $(x_1\ x_2\ x_3)$.

$$|\bar{u}_1| = |\bar{u}_2| = |\bar{u}_3| = 1$$

En el espacio tridimensional existen otras referencias de coordenadas que permiten sustituir los puntos por las ternas de números. Se describen a continuación dos referencias muy usadas.

I. *Referencia cilíndrica.* Considérense los ejes $x\ y\ z$ de la referencia cartesiana ortonormal anterior (Fig.10.1).

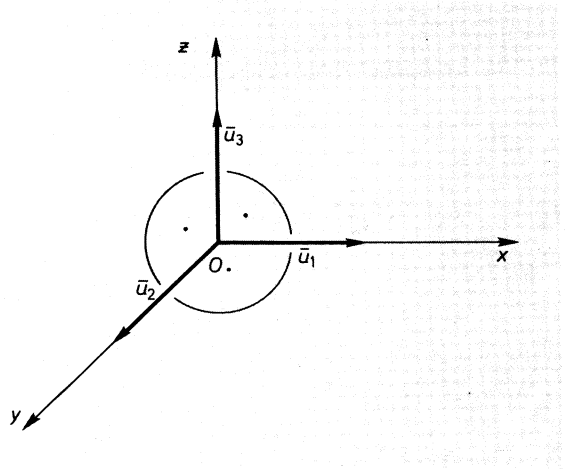


Fig. 10.1

Los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ sobre los ejes x, z, respectivamente, y el sentido de giro g en el plano $x0y$, constituyen la referencia cilíndrica (Fig. 10.2).

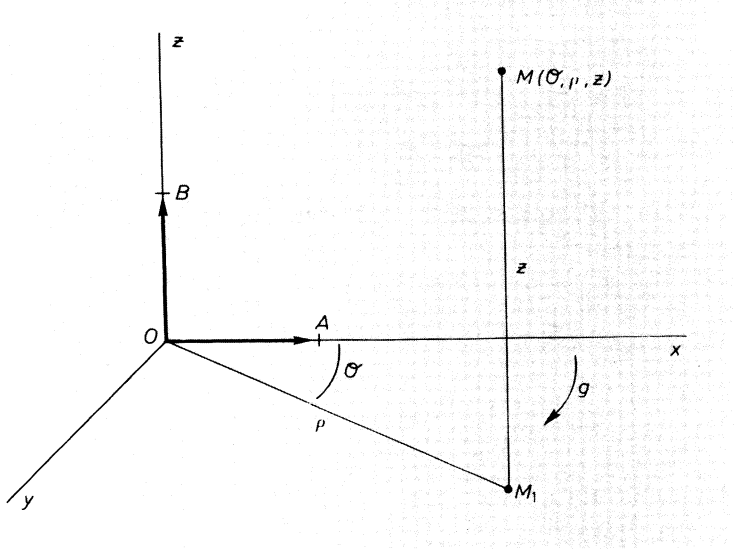


Fig. 10.2

Las coordenadas cilíndricas de un punto M son (θ, ρ, z):

$\theta = \widehat{XOM_1}$; M_1 = proyección de M sobre el plano $x0y$

$\rho = |\overrightarrow{OM_1}|$, con unidad $|\overrightarrow{OA}|$

$$z = \frac{\{\overrightarrow{M_1M}\}}{\{\overrightarrow{OB}\}}$$

Es habitual que $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}| = 1$.

Los campos de variabilidad de las coordenadas cilíndricas son:

$$0 \leq \theta < 2\pi$$
$$0 \leq \rho < +\infty$$
$$-\infty < z < +\infty$$

Por lo tanto existe una biyección entre los puntos del espacio y las ternas de puntos de la semibanda infinita.

$$[0, 2\pi) \times [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty) = [0, 2\pi) \times \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}$$

Las fórmulas de paso de coordenadas cilíndricas a cartesianas y viceversa son

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} \theta = \operatorname{artg}\dfrac{y}{x} \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = z \end{array}\right\}$$

II. *Referencia esférica.* Sean los ejes x y z de la figura 10.3.

Se fija un sentido de giro en el plano $x0y$, y una unidad de longitud.

Las coordenadas esféricas de un punto M son (θ, φ, ρ).

$\theta = \widehat{x0x_1}$ $\qquad 0 \leq \theta < 2\pi$

$\varphi = \widehat{zOM}$ $\qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$

$\rho = |\overline{OM}|$ $\qquad$ con la unidad fijada $0 \leq \rho < +\infty$

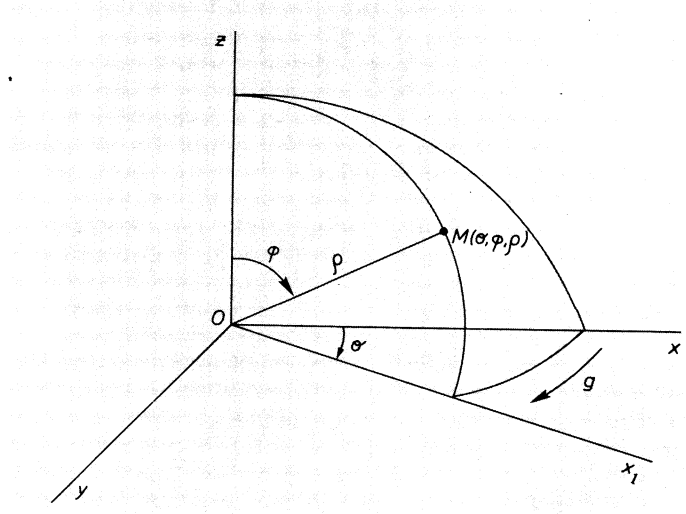


Fig. 10.3

Esta referencia permite establecer una biyección entre los puntos del espacio y los del ortoedro infinito $[0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, +\infty)$.

Las fórmulas de paso de coordenadas esféricas a cartesianas y viceversa son

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \theta = \operatorname{artg} \dfrac{y}{x} \\ \varphi = \operatorname{artg} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{array}\right\}$$

10.2. SUPERFICIE. CONCEPTO. FORMALIZACION

Supóngase una lámina metálica, flexible, perfectamente plana. Si la deformamos, se tendrá una *superficie* que puede considerarse como la imagen de una aplicación unívoca de la lámina antes de la deformación (o sea cuando es plana) en la lámina deformada. (Fig. 10.4).

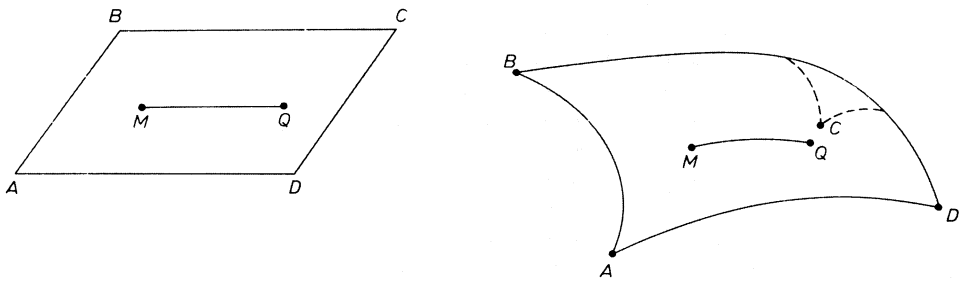


Fig. 10.4

La lámina plana se considera formando parte de un plano euclídeo. La lámina deformada «se ha salido del plano» y por lo tanto está incluida en el espacio euclídeo.

La lámina de la que hemos partido no tiene por qué ser rectangular; puede tener la forma de una región del plano.

A partir de estas ideas, se puede definir una *superficie* como la imagen de una aplicación de una región del plano euclídeo en el espacio euclídeo tridimensional.

Las coordenadas en E_2 se designarán (u, v) y las coordenadas en E_3 serán (x, y, z).

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & E_3 \\ {\scriptstyle R \subset E_2} & & \\ M = (u, v) & \longrightarrow & f(u, v) = M' = (x, y, z) \end{array}$$

M' es el punto imagen de M. M' tiene de coordenadas (x, y, z) y M tiene de coordenadas (u, v).

Las coordenadas (u, v) de M se llaman *coordenadas intrínsecas de* M'.

Conviene describir algunos ejemplos de superficies antes de dar precisión a la definición anterior, cosa que no se puede hacer hasta que se hable de función real de dos variables reales, en el apartado siguiente.

I. Supongamos una esfera de centro el origen y radio r. Si en las fórmulas de transformación de coordenadas esféricas a cartesianas se hace $\rho = r$, resultan:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \varphi \end{array}\right\}$$

Si hacemos $u = \varphi$, $v = \theta$, estas fórmulas definen una aplicación de la región

$$[0, 2\pi) \times [0, \pi] = R \subset E_2 \text{ en } E_3.$$

A continuación representamos gráficamente la aplicación. Téngase en cuenta que cada línea trazada sobre R se aplica en la línea del mismo grosor trazada sobre la superficie esférica. (Fig. 10.5).

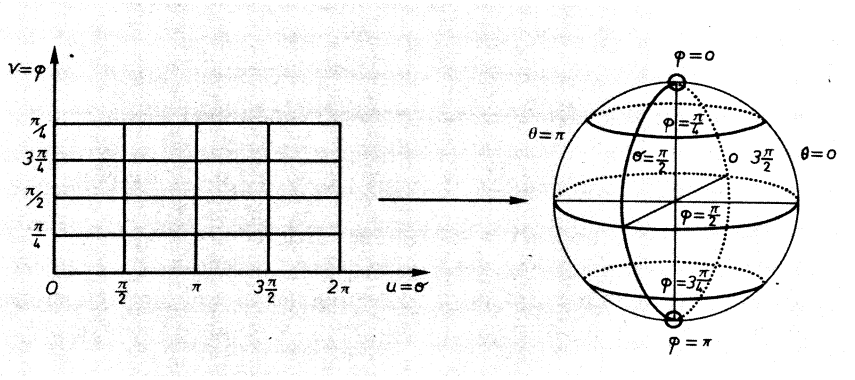


Fig. 10.5

En este caso la región R que se aplica en E_3 es un rectángulo.

La aplicación es

$$M = (u, v) \longrightarrow M' = (r \operatorname{sen} v \cos u, r \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, r \cos v)$$

La imagen de la aplicación, o sea la superficie, es una esfera.

II. Supongamos un cono de revolución de eje el eje z y de semiángulo α.

En las ecuaciones de transformación de esféricas a cartesianas hacemos $\varphi = \alpha$ y resulta

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \alpha \end{array}\right\}$$

Si en estas ecuaciones se hacen $u = \theta$, $v = \rho$, obtenemos una aplicación de la región

$$[0, 2\pi) \times [0, +\infty) = R \text{ en } E_3.$$

Representemos gráficamente la aplicación, siguiendo el criterio del ejemplo anterior (Fig. 10.6).

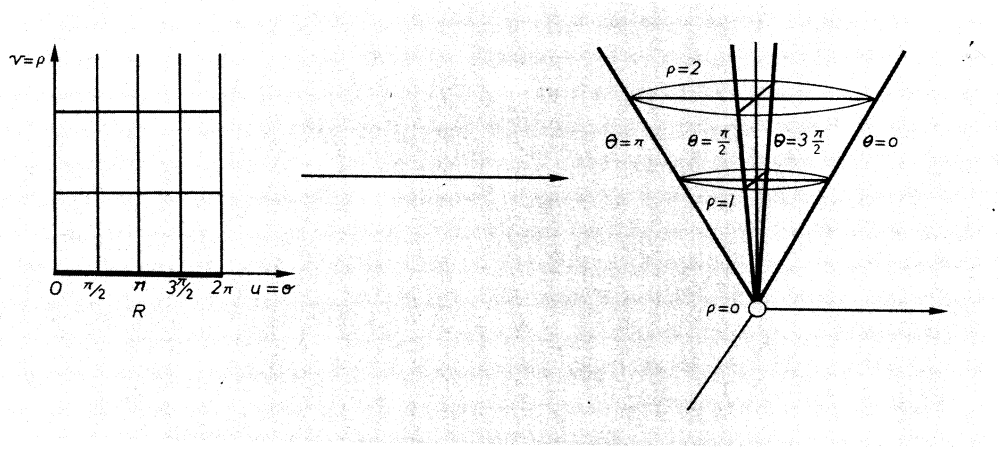


Fig. 10.6

En este caso la región R es un rectángulo infinito. La aplicación es

$$M(u, v) \longrightarrow M'(v \text{ sen } \alpha \cos u, v \text{ sen } \alpha \text{ sen } u, v \cos \alpha)$$

La imagen de la aplicación es una superficie cónica.

III. Consideremos un cilindro de revolución de radio r y eje el eje z. En las fórmulas de paso de coordenadas cilíndricas a cartesianas hacemos $\rho = r$ y resulta

$$\left\{\begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \text{ sen } \theta \\ z = z \end{array}\right\}$$

Si se hace $u = \theta$, $v = z$ se tendrá definida la transformación. Gráficamente se representa en la figura 10.6.

En este caso la región R es una banda infinita. La aplicación es

$$M(u, v) \longrightarrow M'(r \cos u, r \text{ sen } u, v)$$

La imagen de la aplicación es una superficie cilíndrica.

IV. Sea la ecuación de la superficie que se obtiene al girar sobre su eje $y = \text{Ch } x$ que tiene como ecuación $z = \text{Ch } \sqrt{x^2 + y^2}$; pero puede escribirse en coordenadas cilíndricas:

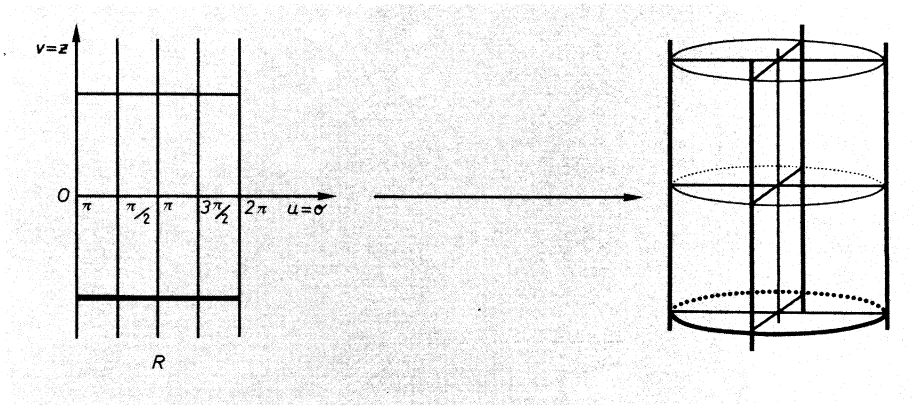


Fig. 10.7

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = \text{Ch}\,r \end{array}\right\}$$

Si se hacen $\theta = u$, $r = v$ se obtiene una aplicación de la región $[0, 2\pi) \times [0, +\infty) = R$ en E_3.

La aplicación se representa gráficamente en la figura 10.8.

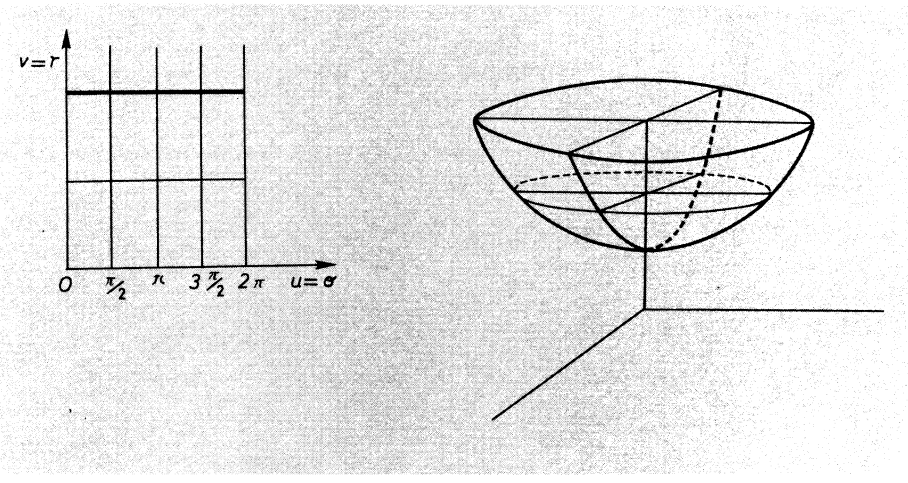


Fig. 10.8

Ejercicios

1. Escríbase la aplicación del ejercicio IV.
2. Desarróllese completamente

$$\begin{aligned} x &= a\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y &= b\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ z &= c\cos\varphi \end{aligned}$$

que representa un elipsoide (forma de huevo).

La ecuación cartesiana del elipsoide es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; si $a = b = c = R$ resulta la esfera del ejercicio 1.

10.3. FUNCION REAL DE DOS VARIABLES REALES

Se llama función real de dos variables reales a una aplicación de un subconjunto de $\mathfrak{R}^2$ en $\mathfrak{R}$.

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} \mathfrak{R} \\ A \subset \mathfrak{R}^2 \\ (xy) \longrightarrow z = f(xy) \end{array}$$

El conjunto A es abierto o es un sobreconjunto de un abierto.

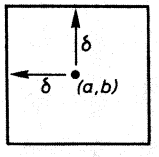
Análogamente a lo que le ocurre a la función real de una variable real, que puede representarse en el plano mediante su gráfica, también en este caso podemos acudir a la representación gráfica en el espacio de la función de dos variables reales. Entendemos por gráfica de la función anterior el conjunto de puntos de E_3 cuyas coordenadas cartesianas son $(x, y, f(xy))$ para $(x, y) \in A$.

La gráfica puede representarse en el espacio, construyendo una maqueta o, lo que es más corriente, recurriendo a las técnicas de la perspectiva caballera.

Límite. Se define

$$\lim_{(xy)\to(ab)} f(xy) = A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / |(xy) - (ab)| < \delta \Rightarrow |f(xy) - A| < \varepsilon$$

Representamos $|(xy) - (ab)| < \delta$ como el entorno de centro (a, b) y radio δ; y se toma indistintamente un círculo o un cuadrado.



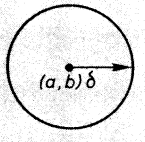


Fig. 10.9

$|x - a| < \delta \wedge |y - b| < \delta$ $\qquad$ $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$

Función continua. Se dice que $f(xy)$ es continua en $(a\ b)$ cuando

$$\lim_{(xy)\to(ab)} f(xy) = f(ab)$$

Derivación parcial. (Fig. 10.10.)

Sea la función $f(xy)$ definida en las proximidades de (ab) y en el mismo punto (a, b).

Se define

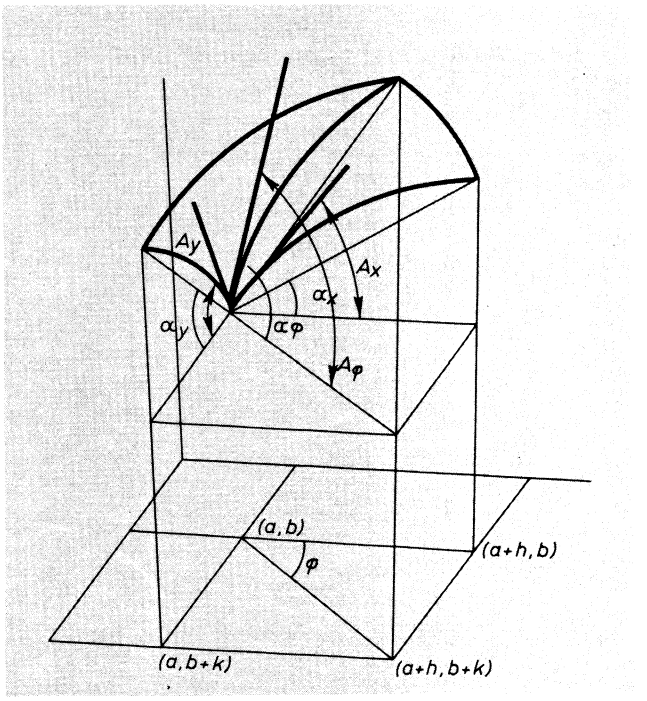


Fig. 10.10

$$\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial x}\right]_{(a,b)} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta_x f(xy)}{\Delta x}\right]_{(ab)}$$

O sea

$$\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial x}\right]_{(ab)} = \operatorname{tg} A_x$$

$$\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial y}\right]_{(ab)} = \lim_{\Delta y \to 0} \operatorname{tg} \alpha_y = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{\Delta_y f(xy)}{\Delta y}\right]_{(ab)}$$

Es decir

$$\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial y}\right]_{(ab)} = \operatorname{tg} A_y$$

Acabamos de definir la *derivación parcial*, según la dirección del eje x, y según la dirección del eje y. En el primer caso consideramos la y constante y en el segundo la x constante.

Ejemplo

$$z = 2xy + x^3 + y^2 + 6y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y + 3x^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y + 6$$

Las derivaciones, según las direcciones de los ejes, son casos muy particulares. Vamos a definir la derivación según una dirección cualquiera, determinada por el ángulo φ.

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}; \quad r_\varphi = \sqrt{h^2 + k^2}$$

$$\left[\frac{\partial f(xy)}{\partial r_\varphi}\right]_{(ab)} = \lim_{r_\varphi \to 0} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b)}{r_\varphi}$$

$$\frac{f(a + h, b + k) - f(ab)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + h^2}} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b + k)}{h} +$$

$$+ \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}$$

Tomando límites en ambos miembros para $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$ y haciendo

$$\frac{\partial f(xy)}{\partial x} = z_x, \quad \frac{\partial f(xy)}{\partial y} = z_y, \quad \frac{\partial f(xy)}{\partial r_\varphi} = z_\varphi$$

resulta la importante fórmula

$$\boxed{z_\varphi = z'_x \cos\varphi + z'_y \operatorname{sen}\varphi}$$

$z_\varphi = \operatorname{tg} A_\varphi$ da la pendiente según la dirección φ.

La fórmula anterior se traduce en la siguiente circunferencia indicatriz de pendientes de la figura 10.11.

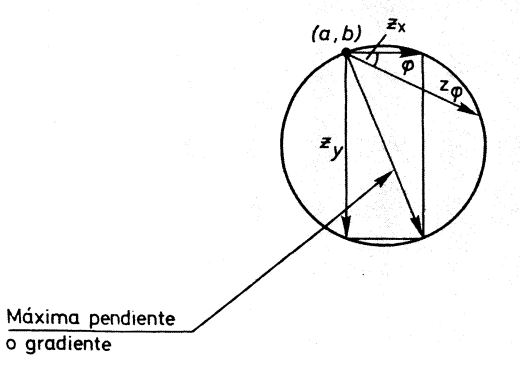


Fig. 10.11

Las derivadas parciales de orden dos, tres, etc., se definen de manera lógica. Se usa la notación

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \text{ etc.}$$

Las funciones reales de variable real sólo tienen dos tipos de derivadas: a derecha e izquierda. Una función es derivable si ambas coinciden.

En el caso de funciones de dos variables existen infinitas derivadas, una para cada dirección.

Se dice que una función es derivable según una dirección φ cuando $z_\varphi = Z_{\varphi+\pi}$.

Función de clase k. Se dice que una función es de clase k cuando tiene derivadas continuas hasta las de orden k.

10.4. DISTINTAS FORMAS DE EXPRESAR LA ECUACION DE UNA SUPERFICIE

Según hemos visto, una superficie es una aplicación de una región de E_2 en E_3

$$\begin{array}{l} R \xrightarrow{f} E_3 \\ (u, v) \longrightarrow f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{array}$$

Esta aplicación equivale a las tres funciones de dos variables $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Esto se puede constatar volviendo a leer los ejemplos del apartado 10.2.

El conjunto de tres funciones reales forman lo que se llama una función vectorial tridimensional. Se puede decir que una superficie es una *función vectorial tridimensional de dos variables reales.*

Al definir matemáticamente una superficie se requiere que no tenga variaciones infinitesimales bruscas; que sea suficientemente regular.

Lo que se diga de las tres funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, se dice de la superficie. Por ejemplo, la superficie es de clase k si las tres funciones son de clase k.

En geometría diferencial se exige que las tres funciones sean *al menos de clase* 3, para que se cumplan las condiciones de regularidad.

Resumiendo: Una superficie es la imagen de una aplicación f de una región de E_2 en E_3.

$$\begin{array}{l} E_2 \supset R \xrightarrow{f} E_3 \\ (u, v) \longrightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{array}$$

Las tres funciones de dos variables reales que definen la aplicación han de ser al menos de clase 3.

La gráfica de una función es una superficie pero no recíprocamente. (Demuéstrese como ejercicio.)

La expresión de una superficie

$$\left\{\begin{array}{l} x = x(u\,v) \\ y = y(u\,v) \\ z = z(u\,v) \end{array}\right\}$$

se conoce como *ecuaciones paramétricas.*

Si entre las tres ecuaciones se elimina $(u\ v)$ se tendrá la

$$\textit{ecuación implícita}\ \phi\ (x\ y\ z) = 0$$

Si la z está despejada, bien a partir de $\phi(x\ y\ z) = 0$, bien a partir de las ecuaciones paramétricas,

$$\left.\begin{matrix} x = x(u\ v) \\ y = y(u\ v) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u = U(xy) \\ v = V(xy) \end{matrix}\right. \Rightarrow z = z(u\ v) = z(U(xy), V(xy)),$$

se conoce como *ecuación explícita.*

El paso de una expresión a otra no tiene dificultades teóricas.

Ejemplo.

Las ecuaciones paramétricas del elipsoide son

$$\left\{\begin{matrix} x = a\cos u \operatorname{sen} v \\ y = b\cos u \cos v \\ z = c\operatorname{sen} u \end{matrix}\right\}$$

Eliminemos (u, v):

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \cos^2 u\,(\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v) = \cos^2 u \\ \dfrac{z^2}{c^2} = \operatorname{sen}^2 u \end{matrix}\right\}$$

Sumando miembro a miembro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \textit{ecuación implícita}$$

La ecuación explícita se obtiene despejando z

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

10.5. SUPERFICIES ELEMENTALES

En este epígrafe se establecen las ecuaciones de las superficies más elementales, escogiendo los ejes en la forma más adecuada, para que la ecuación resulte sencilla.

Las escribiremos en forma implícita, pues en forma paramétrica, prácticamente, están en el apartado 10.2.

La superficie más elemental es el *plano*, pues las variables están elevadas al exponente unidad.

En orden de complicación siguen las ecuaciones de segundo grado.

Esfera. (Fig. 10.12.)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0$$

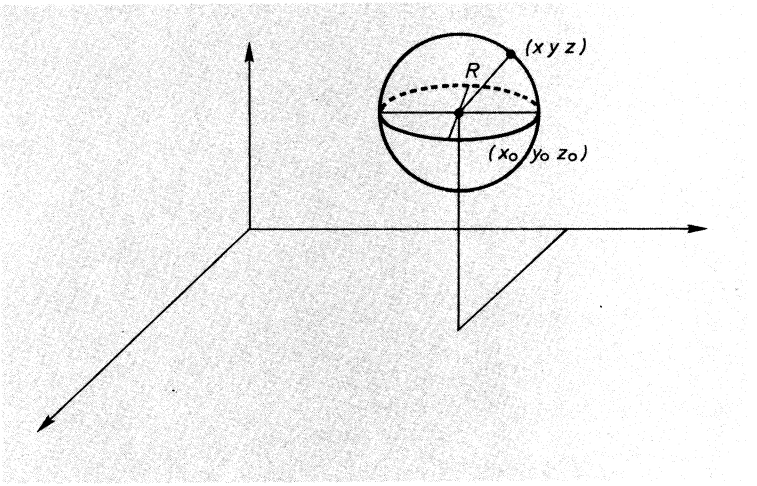


Fig. 10.12

Características:

1.ª) Es ecuación de segundo grado.

2.ª) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales.

Ejercicio

Hállese el radio y las coordenadas del centro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$

$$x_0 = \frac{-6}{2} = -3, \quad y_0 = \frac{+8}{2} = 4, \quad z_0 = \frac{-4}{2} = -2;$$

$$29 - R^2 = 20; \quad R = \sqrt{9} = 3$$

Superficie cilíndrica. Es la superficie engendrada por las rectas que tienen una dirección fija y se apoyan en una curva llamada directriz del cilindro. Por ejemplo (Fig. 10.13), vamos a tomar como directriz el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ contenido en el plano $x0y$ y como dirección de las generatrices la del eje z.

Ecuación $x^2 + y^2 = r^2$

Tomemos como directriz (ahora Fig. 10.14) la parábola $z^2 = 2py$ contenida en el plano $y0z$, y como dirección de las generatrices la del eje x.

Ecuación $z^2 = 2py$

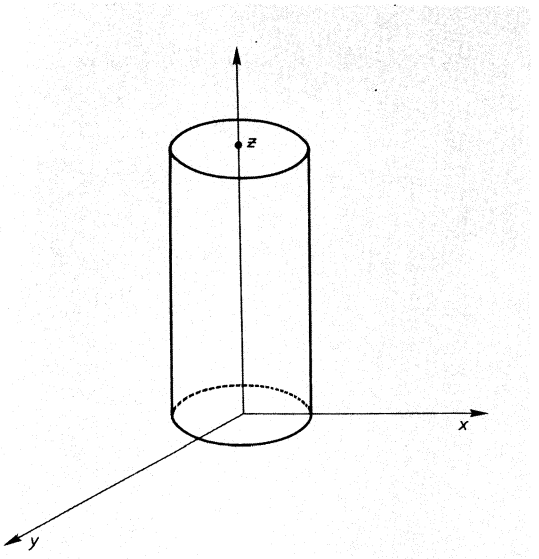


Fig. 10.13

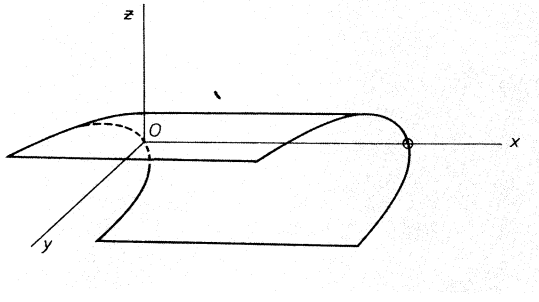


Fig. 10.14

Considérese por último la superficie cilíndrica de directriz la hipérbola

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

y generatrices paralelas al eje z. (Fig. 10.14.)

Ecuación $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Ejercicios

1) Escríbase la ecuación de cilindros elípticos de generatrices paralelas al eje y, y cuya directriz sea una elipse contenida en el plano $x0y$ y de ejes paralelos a $0x$, $0z$.

2) Ecuación de la superficie cilíndrica engendrada por las rectas paralelas a la distancia 3 a la recta $x = y = z$.

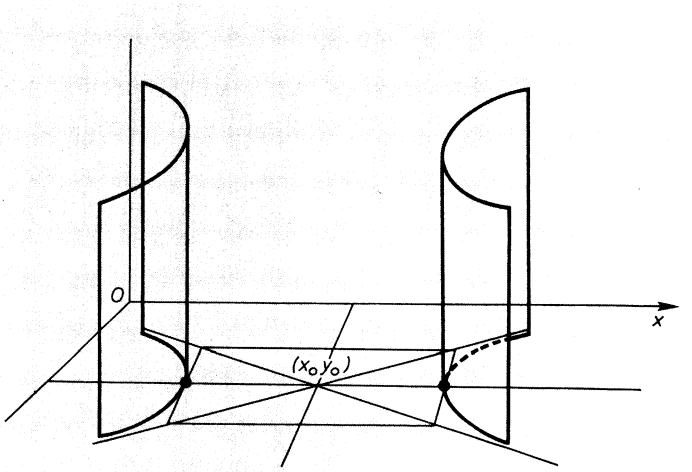


Fig. 10.15

Superficie cónica. Es la superficie engendrada por las rectas que unan un punto fijo llamado vértice del cono con los puntos de una curva llamada directriz del cono.

Vamos a deducir la ecuación del cono de revolución que tiene como eje el eje x y como semiángulo cónico α. (Fig. 10.16.)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x}$$

$$\boxed{y^2 + z^2 - x^2 \operatorname{tg} \alpha = 0}$$

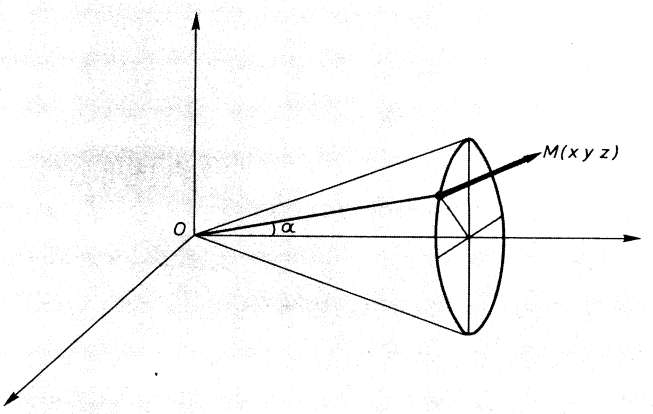


Fig. 10.16

Cono de vértice el origen y directriz la hipérbola

$$\left\{\begin{array}{r} y^2 - z^2 = 1 \\ x = k \end{array}\right\}$$

Sea $P = (K, \sqrt{1 + \beta^2}, \beta)$ un punto genérico de la hipérbola directriz.

Ecuación de OP

$$\frac{x}{K} = \frac{y}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \frac{z}{\beta}$$

$$\beta = \frac{Kz}{x}, \quad \frac{y}{\sqrt{1 + \dfrac{K^2 z^2}{x^2}}} = \frac{x}{K} \Rightarrow \quad \boxed{x^2 = K^2(y^2 - z^2)}$$

Ejercicio

Ecuación del cono de vértice $V = (1, 0, 0)$, y directriz

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y^2 + 2z^2 = 1 \end{array}\right\}$$

Elipsoide. (Fig 10.17.)

Tiene de ecuación referida a sus planos de simetría como planos coordenados

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Al cortar por planos cualesquiera, las curvas de intersección son elipses.

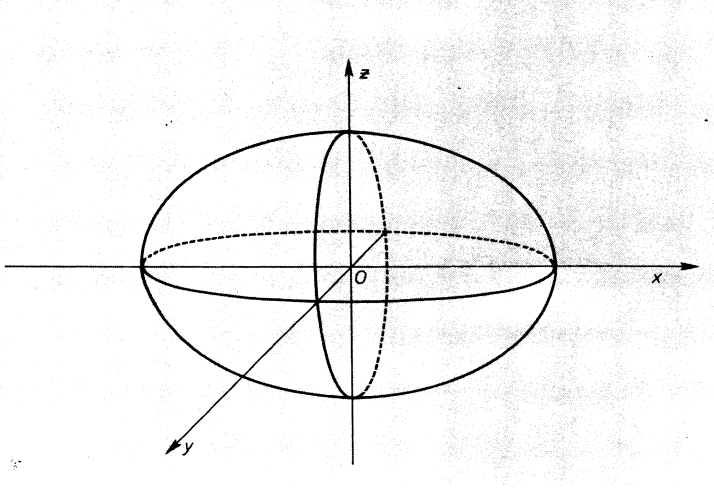


Fig. 10.17

Si $a = b$ o $b = c$ o $a = c$, es una superficie de revolución.
Si $a = b = c = R$ resulta una esfera de radio R.
Se llama «elipsoide imaginario» a la superficie que representa la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Esta superficie no tiene existencia en el campo real, que es el que estamos estudiando.

Hiperboloide. Refirámosle también a sus planos de simetría. Existen dos tipos:
1.º) Hiperboloide de una hoja (Fig. 10.18).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = +1$$

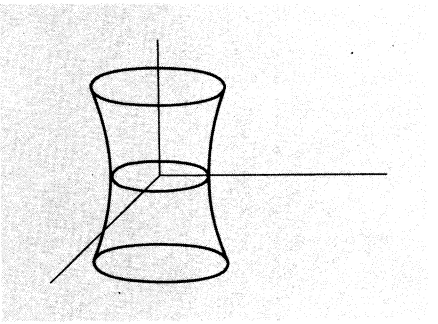


Fig. 10.18

Los planos paralelos a $x0y$ se cortan según elipses; los paralelos a los otros planos coordenados, según hipérbolas.

Es una superficie reglada, es decir formada por rectas llamadas generatrices. En efecto, la ecuación se puede escribir

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

o sea

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

El sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) \\ \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{x}{a}\right) \end{array}\right\}$$

representa una recta para cada valor de λ. Si eliminamos λ, para lo cual basta multiplicar miembro a miembro, obtenemos la ecuación del hiperboloide, luego éste contiene todas las rectas anteriores que constituyen un sistema de generatrices. Existe otro sistema representado por

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = \mu\left(1 + \dfrac{x}{a}\right) \\ \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\mu}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) \end{array}\right\}$$

2.º) *Hiperboloide de dos hojas* (Fig. 10.19).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

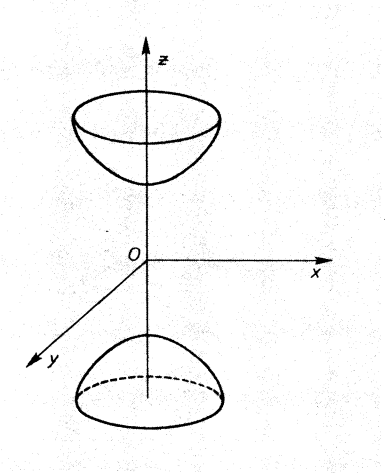


Fig. 10.19

Este hiperboloide no admite generación rectilínea.

En cualquiera de los casos, si $a = b$ resultan hiperboloides de revolución.

Paraboloide. Vamos a referirnos a sus dos planos de simetría como planos $x0z$, $y0z$, y a su vértice (punto de intersección del eje con las superficies) como origen

1.º $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz$ *Paraboloide elíptico* (Fig. 10.20).

Los planos paralelos al $x0y$ lo cortan según elipses. Los planos paralelos a $y0z$ o $x0z$ lo cortan según parábolas.

Si $a = b$ resulta un paraboloide de revolución.

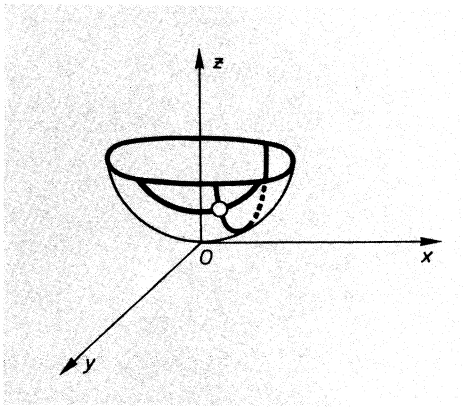


Fig. 10.20

2.º $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz$ *Paraboloide hiperbólico* (Fig. 10.21).

Los planos paralelos al $x0y$ lo cortan según hipérbolas. Los planos paralelos a $y0z$ o $x0z$ lo cortan según parábolas.

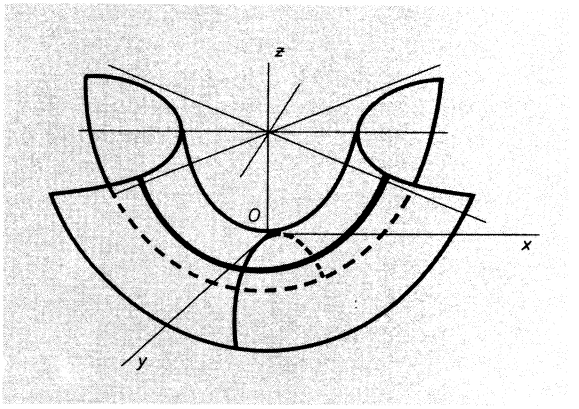


Fig. 10.21

Todas las superficies que se acaban de estudiar, cuya ecuación es de segundo grado, se conocen con el nombre de *cuádricas*.

10.6. CURVAS ALABEADAS. CONCEPTO. FORMALIZACION

En el capítulo anterior se han estudiado las curvas planas, es decir, las curvas contenidas en un plano. Existen muchas curvas que no están contenidas en ningún plano. El mundo físico nos ofrece muchas imágenes que sugieren este tipo de curvas no planas que se llaman *curvas alabeadas*. Un ejemplo puede ser un muelle. Otro ejemplo puede ser el borde de una montura de caballo. (Fig. 10.22.)

Para imaginar la curva alabeada se puede suponer que resulta de deformar un alambre flexible de cualquier manera, es decir, sin especial cuidado para que se mantenga plano.

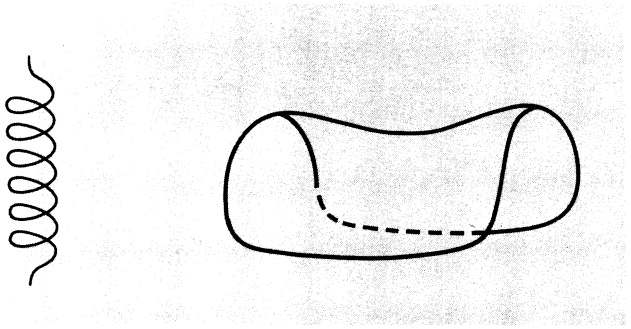


Fig. 10.22

Definimos la *curva alabeada* como la imagen de una aplicación de un segmento en E_3.

$$\begin{array}{c} R \xrightarrow{f} E_3 \\ {\scriptstyle R \subset \mathbb{R}} \\ t \longrightarrow f(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

Esta aplicación es una función vectorial de una variable real. (Se ha visto que la superficie es la imagen de una función vectorial de dos variables reales.) Decir que la aplicación f es continua o derivable equivale a decir que lo son las tres funciones que la definen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Es costumbre exigir (con el fin de que las curvas sean suficientemente regulares) que la aplicación anterior f sea al menos de tercera clase, es decir, que tenga al menos derivadas terceras continuas. Curvas *analíticas* son las de clase infinito o sea las que tienen derivadas continuas de todos los órdenes.

10.7. DISTINTAS FORMAS DE EXPRESAR LAS ECUACIONES DE UNA CURVA

La expresión de una curva

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\}$$

tal como se ha definido, se llama *forma paramétrica*.

Si se elimina el parámetro t entre las tres ecuaciones anteriores, despejando t en una de ellas y sustituyendo en las otras dos, se tendrán las ecuaciones en *forma implícita*

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x\ y\ z) = 0 \\ f_2(x\ y\ z) = 0 \end{array} \right\}$$

En este caso, la curva viene expresada como intersección de dos superficies. Ya se vio que una recta en el espacio puede venir dada como intersección de dos planos.

Ejemplo

Sea la curva alabeada

$$\begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = L(t - 1) \\ z = 2t^2 + t \end{cases}$$

Para expresarla implícitamente despejamos t de la primera ecuación y sustituimos en las otras dos

$$t = \frac{x - 5}{3} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y - L\frac{x - 8}{3} = 0 \\ \\ 9z - 3(x - 5) - 2(x - 5)^2 = 0 \end{array}}$$

ecuaciones implícitas

10.8. ESTUDIO DE ALGUNAS CURVAS: CUBICAS, HELICES

Cerrando el capítulo, se procede a estudiar algún tipo particular de curva alabeada. Se llama *cúbica* la curva tal que un plano la corta en tres puntos como máximo (Fig. 10.23). Las ecuaciones son del tipo:

$$x = \frac{At^3 + Bt^2 + Ct + D}{at^3 + bt^2 + ct + d} \qquad y = \frac{A't^3 + B't^2 + C't + D'}{at^3 + bt^2 + ct + d}$$

$$z = \frac{A''t^3 + B''t^2 + C''t + D''}{at^3 + bt^2 + ct + d}$$

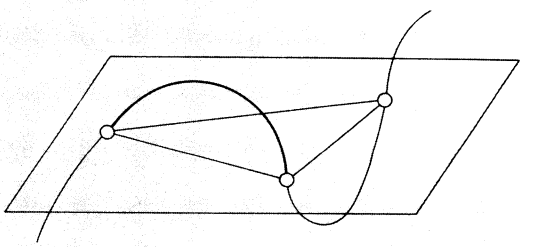


Fig. 10.23

En efecto, sea un plano cualquiera $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$.

Para hallar los valores de t correspondientes a los puntos de intersección basta sustituir en la ecuación del plano los $x\,y\,z$ de la curva y resolver en t.

$$(A\alpha + A'\beta + A''\gamma + a\delta)t^3 + (B\alpha + B'\beta + B''\gamma + b\delta)t^2 + (C\alpha + C'\beta + C''\gamma + c\delta)t + \\ + (D\alpha + D'\beta + D''\gamma + d\delta) = 0$$

Como es una ecuación de tercer grado existen tres puntos de corte como máximo, c.q.d.

Las *hélices* son curvas que tienen forma de muelle. Trazadas sobre una superficie cilíndrica tienen la propiedad de cortar según un ángulo constante las generatrices del cilindro. Consideramos sólo cilindros de revolución.

La hélice es la curva descrita por un punto móvil que gira alrededor de un eje con velocidad de rotación constante al mismo tiempo que se traslada paralelamente al eje con velocidad constante (Fig. 10.24).

$$M(r\cos\omega t,\ r\operatorname{sen}\omega t,\ vt)$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\omega t \\ y = r\operatorname{sen}\omega t \\ z = vt \end{array}\right\}$$

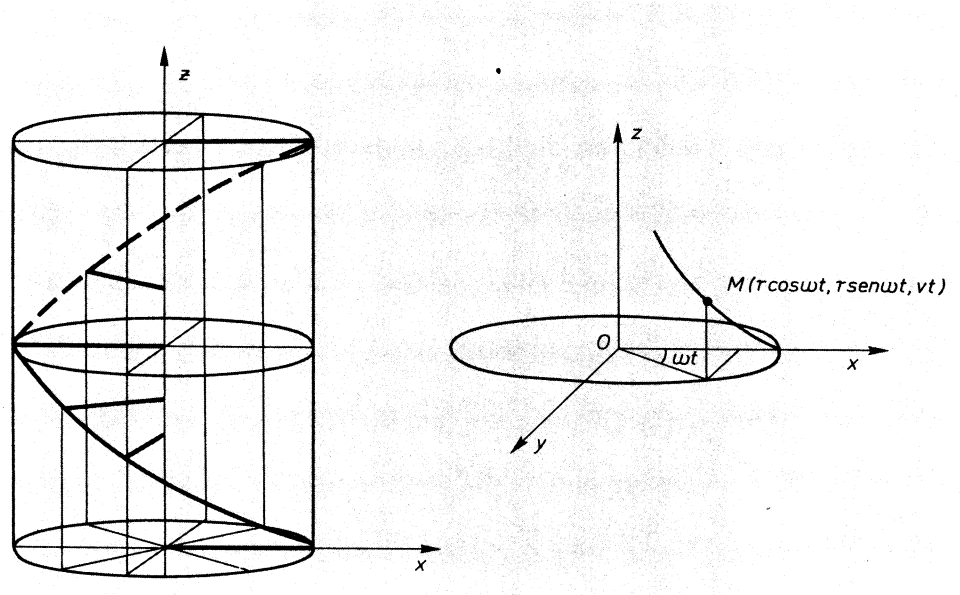


Fig. 10.24

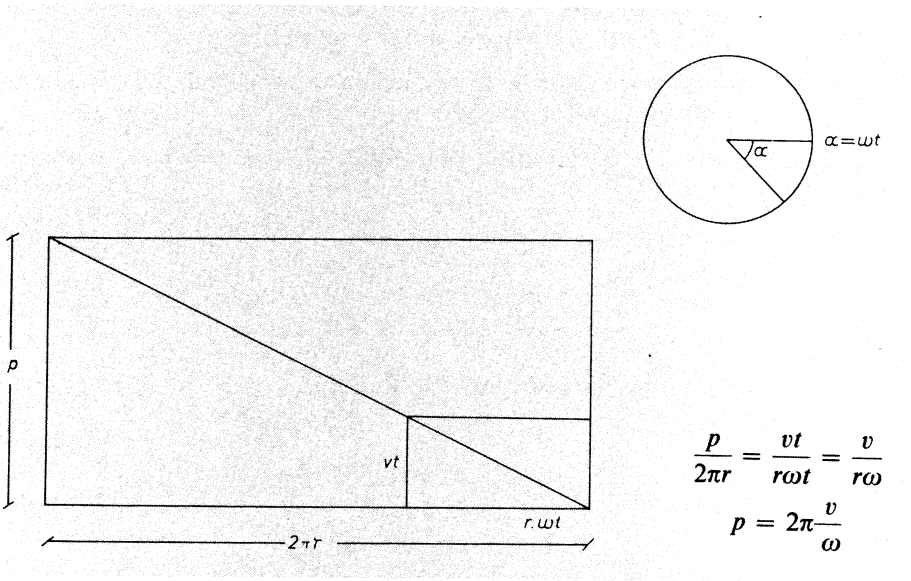
Si se elimina t

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{artg}\omega t \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{y}{x} = \operatorname{artg}\frac{\omega}{v}z}$$

forma implícita

p es el paso y se relaciona con v y w según se deduce de la figura 10.25.



$$\frac{p}{2\pi r} = \frac{vt}{r\omega t} = \frac{v}{r\omega}$$

$$p = 2\pi\frac{v}{\omega}$$

Fig. 10.25

Se llama *helicoide o superficie helicoidal* la engendrada por una recta paralela al plano $x0y$, que se apoya en el eje z y en la hélice.

Esta superficie es la que forma el forjado que sostiene una escalera de caracol. En la figura 10.24 vienen indicadas en negro algunas de las generatrices del helicoide.

La hélice anterior, en forma implícita, viene dada como intersección del cilindro

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

y el helicoide

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{p}z$$

p es el desnivel que se salva en una vuelta completa; en el caso de la escalera, p es la distancia entre pisos consecutivos.

10.9. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. Dada la superficie $z = x^2 - 3y^2 + 7x + 6$, exprésese en forma implícita y paramétrica.

2. Dada la superficie

$$\begin{cases} x = 2u + 3v \\ y = 5u + v \\ z = u - u \end{cases}$$

exprésese en forma implícita.

3. Dada la función $z = x^2 + 3y$, hállese z'_{φ}, para $\varphi = \pi/3$.

4. Determínese la ecuación de la superficie cilíndrica de revolución, de eje paralelo a z, radio = 3 y que pasa por el punto (1, 1, 0).

5. Calcúlese la ecuación del cono de revolución de semiángulo $\alpha = \pi/3$, de vértice el origen y de eje la recta $x = y = z$.

6. Dada la curva $x = 3t$, $y = t^2 - 6$, $z = L(t - 2)$, hállense sus ecuaciones cartesianas.

7. Se establecen las ecuaciones de la curva

$$\begin{aligned} 3x - 3y + 5z &= 0 \\ x^2 - y^2 + 8z &= 0; \end{aligned}$$

exprésese en forma paramétrica.

8. Dada la elipse

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 5 \operatorname{sen} t \\ z = 0, \end{cases}$$

exprésese en forma paramétrica.

9. Exprésese la superficie $x^2 - y^2 + 3x = 0$ en coordenadas esféricas.

10. Exprésese la ecuación de una superficie cilíndrica en el sistema más adecuado, y lo mismo para una esfera.

11

Integrales indefinidas

11.1. DEFINICION DE INTEGRAL INDEFINIDA O FUNCION PRIMITIVA

Dada una función $f(x)$, se llama *integral indefinida* de $f(x)$ a una función $F(x)$ tal que se verifica que la derivada de $F(x)$ es igual a $f(x)$; o sea:

$$F'(x) = f(x)$$

La integral indefinida de $f(x)$ también recibe el nombre de *función primitiva* de $f(x)$, y se representa

$$\int f(x)\,dx$$

Se tiene, pues, la siguiente equivalencia de definición

$$\int f(x)\,dx = F(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

La integración es la operación inversa de la derivación.

11.2. LA FUNCION PRIMITIVA NO ES UNICA

Si $\int f(x)\,dx = F(x)$, también se verifica que $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, en donde C es una constante, pues

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) + C\right] = \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

La interpretación geométrica de este resultado es fácil:

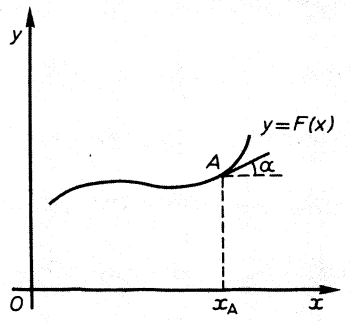


Fig. 11.1

En cada punto A de abscisa x_A, la tangente a la curva $y = F(x)$ tiene de pendiente $F'(x_A) = f(x_A) = \text{tg}\,\alpha$. (Véase figura 11.1.)

Si se considera la función trasladada de $F(x)$, en la dirección del eje y, una magnitud C, resulta $y = F(x) + C$.

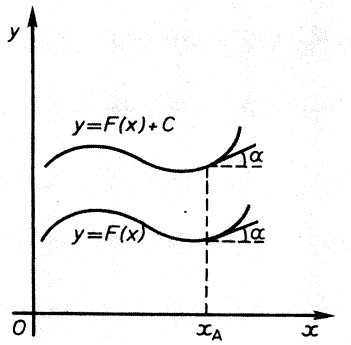


Fig. 11.2

El punto de abscisa x_A, en $y = F(x) + C$, tendrá una tangente paralela a la tangente en $y = F(x)$; luego, evidentemente, sus derivadas son iguales, pues ambas lo son a $\text{tg}\,\alpha$.

En resumen: toda función tiene infinitas funciones primitivas. Dos cualesquiera de ellas difieren en una constante.

11.3. FUNCIONES INTEGRABLES

La integración indefinida o cálculo de primitivas tiene relación, o mejor dicho, pertenece al cálculo diferencial (diferenciación y derivación), según la misma definición.

Al estudiar la derivada, se vio que las funciones elementales: polinomios, fun-

ciones racionales, funciones irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, eran derivables; es más: se llegaba a unas reglas de derivación que permitían, mediante la aplicación de la regla de derivación de una función compuesta (función de función), calcular la derivada de cualquier función «ordinaria». Aquí se entiende por función «ordinaria» una función combinación de las operaciones racionales, la radicación, la exponenciación, logaritmación o las operaciones trigonométricas.

Ejemplo

$$y = \operatorname{sen} \sqrt{x^2 - 3^x L \operatorname{tg} x}$$

$$y' = \cos \sqrt{x^2 - 3^x L \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3^x L \operatorname{tg} x}} \left[2x - \left(3^x L\, 3 \cdot L \operatorname{tg} x + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}\right)\right]$$

Decimos que una función $f(x)$ es *integrable*, si existe una función ordinaria, es decir, compuesta de las funciones elementales, tal que su derivada es $f(x)$.

La derivación de cualquier función ordinaria es sencilla y fácil de establecer. Solamente en algunos puntos excepcionales puede no existir la derivada o es necesario recurrir a la definición, pues las reglas de derivación no son aplicables.

En la integracion, sin embargo, ocurre lo contrario, a saber, que la excepción es encontrar una función ordinaria cuya derivada sea una función dada, aunque ésta sea muy sencilla, como puede ser

$$y = \sqrt{5x^3 + 3x^2 - 7x + 4},$$

que no es integrable; es decir:

$$\int \sqrt{5x^3 + 3x^2 - 7x + 4}\, dx$$

no existe.

Cuando en el capítulo siguiente se estudie la integración definida de Riemann, ya se verá que integrales del tipo de la anterior definen ellas mismas una función, aunque ésta no sea función «ordinaria».

La integración enriquece el Análisis matemático, ya que aporta funciones que pueden representarse en la forma

$$y = \int \sqrt{5x^3 + 3x^2 - 7x + 4}\, dx,$$

y aproximarse suficientemente mediante diversos métodos de cálculo, acotando errores.

Las funciones integrables unas son inmediatas y otras se pueden calcular, aplicando ciertos métodos de integración, que las reducen a inmediatas. Esto es lo que se desarrolla en los siguientes números.

11.4. INTEGRALES INMEDIATAS

Las integrales que escribimos a continuación son inmediatas, pues basta con aplicar las reglas de derivación a los segundos miembros, para justificarlas.

$$a)\ \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad f)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$b)\ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{La} + C \qquad g)\ \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$c)\ \int \frac{dx}{x} = Lx + C \qquad h)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

$$d)\ \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad i)\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

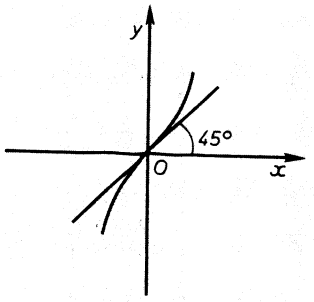
$$e)\ \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

11.5. FUNCIONES HIPERBOLICAS

A partir de la función exponencial e^x y de su inversa $1/e^x = e^{-x}$, se definen unas funciones que tienen cierto interés, conocidas con el nombre de *funciones hiperbólicas*, estudiadas en el capítulo 9.

A continuación se establecen las definiciones y sus gráficas correspondientes.

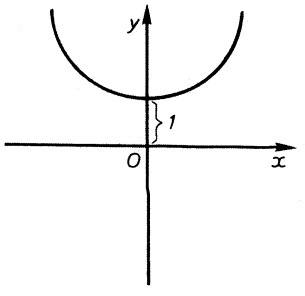
Seno hiperbólico



$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Fig. 11.3

Coseno hiperbólico



$$\operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Fig. 11.4

Tangente hiperbólica

$$\text{Th } x = \frac{\text{Sh } x}{\text{Ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

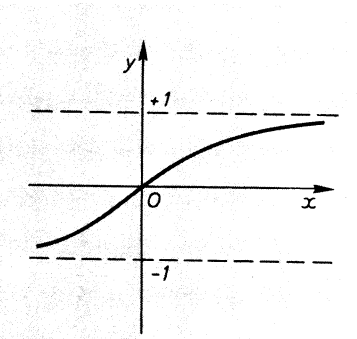


Fig. 11.5

Cotangente hiperbólica

$$\text{Cth } x = \frac{\text{Ch } x}{\text{Sh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

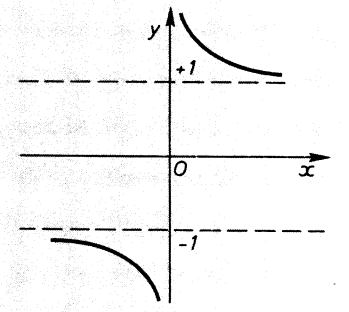


Fig. 11.6

Secante hiperbólica

$$\text{Sech } x = \frac{1}{\text{Ch } x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

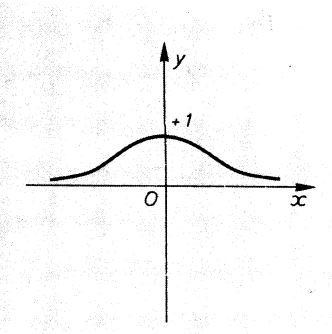
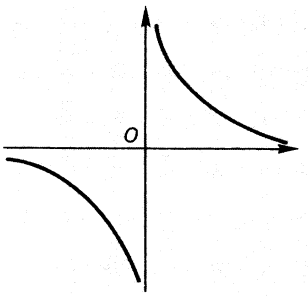


Fig. 11.7

Cosecante hiperbólica



$$\text{Cosech } x = \frac{1}{\text{Sh } x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Fig. 11.8

Como se habrá observado, definidos el seno y el coseno hiperbólicos, las demás funciones son una consecuencia, a semejanza con lo que ocurre en las funciones trigonométricas o funciones circulares.

Es fácil comprobar que se verifica la relación

$$\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1$$

Las curvas de la forma $y = a \cdot \text{Ch} \frac{x}{a}$, donde a es un parámetro, tienen una importancia excepcional, pues son las curvas que forman los cables flexibles (más exactamente, cadenas), suspendidos en sus extremos. Reciben el nombre de *catenarias*.

Razón de la definición de seno y coseno hiperbólicos

La circunferencia es un caso particular de elipse: es aquella elipse que tiene dos ejes iguales, o sea, $a = b$.

Análogamente, la hipérbola equilátera es un caso particular de hipérbola: es aquella hipérbola que tiene los dos ejes iguales.

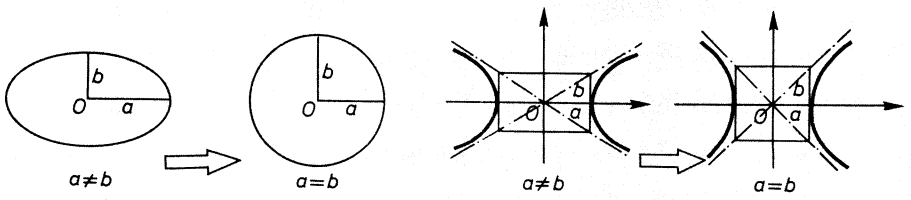


Fig. 11.9

Las funciones trigonométricas seno y coseno se pueden definir así: (cos x, sen x) son las coordenadas del punto P situado sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, tal que el área del sector circular rayado es

$$0AP = \frac{1}{2}x$$

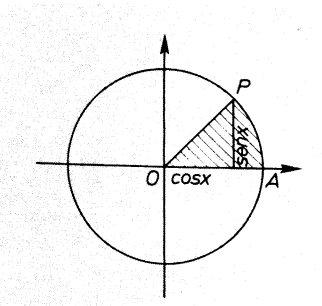


Fig. 11.10

De manera análoga, se pueden definir el seno y coseno hiperbólicos respecto a la hipérbola equilátera:

(Ch x, Sh x) son las coordenadas del punto P situado sobre la hipérbola equilatera $x^2 - y^2 = 1$, tal que el área del sector hipérbolico rayado es

$$0AP = \frac{1}{2}x$$

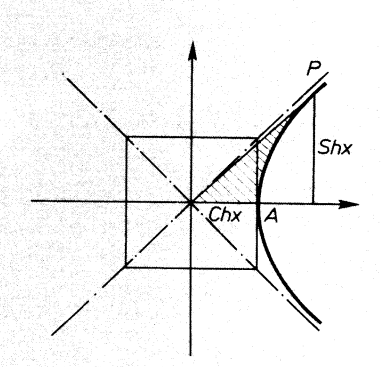


Fig. 11.11

11.6. DERIVACION E INTEGRACION DE FUNCIONES HIPERBOLICAS E INVERSAS

De las mismas definiciones de funciones hiperbólicas resulta:

$$y = \text{Sh}\,x \Rightarrow y' = \text{Ch}\,x \quad ; \quad y = \text{Ch}\,x \Rightarrow y' = \text{Sh}\,x$$

$$y = \text{Th}\,x \Rightarrow y' = \frac{1}{\text{Ch}^2\,x} \quad ; \quad y = \text{Cth}\,x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\text{Sh}^2\,x}$$

Las funciones inversas de las hiperbólicas se expresan anteponiendo a los nombres de las variables la palabra «argumento»

$$y = \operatorname{arg\,Sh}\, x \Leftrightarrow x = \operatorname{Sh} y$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy},$$

y las derivadas que se han escrito, resulta:

1) $y = \operatorname{arg\,Sh}\, x\ (x = \operatorname{Sh} y) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. En efecto.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\operatorname{Ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

2) $y = \operatorname{arg\,Ch}\, x\ (x = \operatorname{Ch} y) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. En efecto:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\operatorname{Sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

3) $y = \operatorname{arg\,Th}\, x\ (x = \operatorname{Th} y) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 - x^2}$. Así es, ya que

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{1/\operatorname{Ch}^2 y} = \operatorname{Ch}^2 y = \frac{\operatorname{Ch}^2 y}{\operatorname{Ch}^2 y - \operatorname{Sh}^2 y} = \frac{1}{1 - \operatorname{Th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Forman parte de las integrales inmediatas las siguientes:

j) $\int \operatorname{Sh} x\, dx = \operatorname{Ch} x + C$

k) $\int \operatorname{Ch} x\, dx = \operatorname{Sh} x + C$

l) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{Ch}^2 x} = \operatorname{Th} x + C$

m) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{Sh}^2 x} = -\operatorname{Cth} x + C$

n) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{arg\,Sh}\, x + C$

p) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arg\,Ch}\, x + C$

q) $\int \dfrac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{arg\,Th}\, x + C$

11.7. CARACTER LINEAL DE LA INTEGRACION

Al establecer que la integración es una operación lineal, se quiere decir:

1.º que la integral de una suma de funciones integrables es igual a la suma de las integrales de los sumandos;
2.º que la integral del producto de una constante por una función integrable es igual a la constante por la integral de la función.

Veamos que, efectivamente, ocurre así:

1.º
$$\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx,$$
pues
$$\frac{d}{dx}\left[\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\int f_1(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int f_2(x)\,dx = f_1(x) + f_2(x)$$

2.º $\int k \cdot f_1(x)\,dx = k\int f_1(x)\,dx$, ya que
$$\frac{d}{dx}\left[k\int f_1(x)\,dx\right] = k\,\frac{d}{dx}\int f_1(x)\,dx = k \cdot f_1(x)$$

Como aplicación se puede calcular la integral de un polinomio.

11.8. METODO DE SUSTITUCION

Considérese $\int f(x)\,dx$ y supóngase que $x = \varphi(t)$ es una función tal que, si se despeja la t, resulta $t = g(x)$.

Es claro que
$$1 = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \varphi'(t) \cdot g'(x)$$

Sustituyendo x y dx por sus expresiones en función de t, considerando $f(x)\,dx$ como producto, se obtiene una nueva integral
$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Puede ocurrir que esta integral sea fácil de calcular, mientras que $\int f(x)\,dx$ no lo fuera.

El método de integración por sustitución expresa que

> si se verifica $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(t)$, resulta que
> $$\int f(x)\,dx = F(g(x))$$

Veamos:

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = \frac{dF}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dF}{dt} \cdot g'(x);$$

pero como

$$\int f(\varphi(t)\, \varphi'(t)\, dt = F(t),$$

resulta

$$\frac{dF}{dt} = f(\varphi(t)\, \varphi'(t);$$

luego

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(\varphi(t)) \underbrace{\varphi'(t) \cdot g'(x)}_{\substack{// \\ 1}} = f(\varphi(t)) = f(x), \qquad \text{c.q.d.}$$

Ejercicio

Calcular las siguientes integrales por el método de sustitución, efectuando los cambios de variable que se indican.

1) $\int \frac{Lx}{x}\, dx$; cambio, $x = e^t \Leftrightarrow t = Lx$

2) $\int \frac{(\text{arc sen } x)^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$; cambio, $x = \text{sen } t \Leftrightarrow t = \text{arc sen } x$

3) $\int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^4 x}\, dx$; cambio, $x = \text{arc sen } t \Leftrightarrow t = \text{sen } x$

4) $\int \text{tg } x\, dx$; cambio, $x = \text{arc cos } t \Leftrightarrow t = \cos x$

11.9. INTEGRACION POR PARTES

Si u y v son funciones de x, sucede que

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

luego

$$\int (u \cdot v)'\, dx = \int (v \cdot u' + u \cdot v')\, dx.$$

Usando del carácter lineal de la integración,

$$u \cdot v = \int v \cdot u'\, dx + \int u \cdot v'\, dx$$

El método de sustitución nos permite escribir

$$u \cdot v = \quad v\, du + \int u\, dv$$

Basta despejar, para que resulte

$$\boxed{\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du}$$

que es la fórmula de la integración por partes.

Conviene estudiar varios ejemplos:

1. $\int Lx\,dx = x \cdot Lx - \int x \cdot d(Lx) = x \cdot Lx - \int x\frac{1}{x}\,dx = x \cdot Lx - x + C$

2. $\int \text{arc tg}\, x\,dx = x \cdot \text{arc tg}\, x - \int x \cdot d(\text{arc tg}\, x) = x \cdot \text{arc tg}\, x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$

$$= x \cdot \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x \cdot \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2}L(1+x^2) + C$$

3. $\int \text{arc sen}\, x\,dx = x \cdot \text{arc sen}\, x - \int x \cdot d(\text{arc sen}\, x) = x \cdot \text{arc sen}\, x -$

$$- \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \cdot \text{arc sen}\, x -$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \cdot \text{arc sen}\, x +$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$$

11.10. INTEGRACION POR REDUCCION

Parece que la mejor forma de entender este método es estudiar un ejemplo concreto.

Se quiere calcular la integral $\int (Lx)^m\,dx = I_m$.

Aplicando la fórmula de integración por partes, resulta:

$$I_m = \int (Lx)^m\,dx = x \cdot (Lx)^m - \int x \cdot m(Lx)^{m-1} \cdot \frac{1}{x}\,dx;$$

es decir, queda

$$I_m = x \cdot (Lx)^m - m \cdot I_{m-1},$$

ley recurrente que relaciona I_m con I_{m-1}.

Si se desea, por ejemplo, calcular

$$I_3 = \int (Lx)^3\,dx,$$

basta aplicar la relación anterior para $m = 3, 2$; o sea:

$$I_3 = x \cdot (Lx)^3 - 3I_2$$
$$I_2 = x \cdot (Lx)^2 - 2I_1 \Rightarrow I_3 = x \cdot (Lx)^3 - 3x(Lx)^2 + 6I_1$$
$$I_1 = \int Lx\,dx = x \cdot Lx - \int x\frac{1}{x}\,dx = x \cdot Lx - x;$$

luego

$$I_3 = x \cdot (Lx)^3 - 3x \cdot (Lx)^2 + 6(x \cdot Lx - x) + C$$

11.11. INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

La idea esencial de este apartado es que toda función racional, es decir, todo cociente de dos polinomios, es integrable, en el sentido del número 11.3. Sea $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional. Si el grado del polinomio $P(x)$ es mayor o igual que el grado del polinomio $Q(x)$, se efectúa la división y se puede escribir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{H(x)}{Q(x)},$$

donde grado $H(x) <$ grado $Q(x)$; y resulta:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{H(x)}{Q(x)}\,dx$$

Como $C(x)$ es un polinomio, sucede que su integral es inmediata. El problema queda, pues, reducido a determinar

$$\int \frac{H(x)}{Q(x)}\,dx$$

Se resuelve fácilmente, si se conocen las raíces del denominador. El cálculo de las raíces de un polinomio hoy no tiene dificultad, ya que se pueden obtener con aproximación más que suficiente, mediante un computador.

El método de cálculo de la integral se basa en descomponer la función racional en fracciones sencillas, cuya integración sea inmediata.

Recuérdese que si un polinomio $P(x)$ tiene las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, el polinomio puede escribirse en forma factorial

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(\ldots)(x - \alpha_n).$$

Precisamente, para la descomposición factorial es para lo que se necesitan las raíces del denominador. Veamos la forma de proceder, cuando el denominador ya se ha escrito en forma factorial.

Ejemplo

Sea

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2(x + 2)((x - 3)^2 + 2^2)}$$

El denominador es un polinomio que tiene las raíces siguientes:

una raíz doble: 1
una raíz sencilla: -2
dos raíces imaginarias conjugadas sencillas: $3 \pm 2i$

La fracción se descompone de manera única en la forma

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2(x+2)((x-3)^2+2^2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} + \frac{Mx+N}{(x-3)^2+2^2}$$

donde A, B, C, M y N son constantes perfectamente determinadas por la función racional.

Una vez que se han determinado dichas constantes, por el procedimiento que luego se expone, la integral está calculada, pues

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2(x+2)((x-3)^2+2^2)}\,dx = A\int \frac{dx}{(x-1)^2} + B\int \frac{dx}{x-1} + C\int \frac{dx}{x+2} +$$

$$+ \int \frac{Mx+N}{(x-3)^2+2^2}\,dx = A\,\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + B\,L(x-1) + C\,L(x+2) +$$

$$+ \frac{M}{2}L[(x-3)^2+2^2] + \frac{M\cdot 3 + N}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{2} + \text{Cte.}$$

¿Qué se ha necesitado para calcular la integral de una función racional? Hacer uso de las integrales inmediatas

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = L(x-a) + C$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{M}{2}L((x-\alpha)^2+\beta^2) + \frac{M\alpha+N}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta}$$

La última, aunque a primera vista un poco complicada, es fácil de recordar y deducir, pues

$$\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{M}{2}\,\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{M\alpha+N}{\beta}\,\frac{1/\beta}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1},$$

y basta integrar ambos miembros.

La integración se complica cuando el polinomio denominador tiene raíces imaginarias conjugadas múltiples. La descomposición es análoga a la que se indica en el siguiente

Ejemplo

$$\frac{2x^2 + 3x - 5}{(x-2)^3((x-4)^2+5)^2}$$

El denominador es un polinomio que tiene las raíces siguientes:

raíz real triple: 2
raíces imaginarias conjugadas dobles: $4 \pm 5i$

La fracción polinómica se descompone de manera única en la forma

$$\frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Mx+N}{((x-4)^2+5^2)^2} + \frac{M_1x+N_1}{(x-4)^2+5^2}$$

Al integrar, aparece una integral no inmediata,

$$\int \frac{Mx+N}{((x-4)^2+5^2)^2}\,dx.$$

En general, no lo son las del tipo

$$\int \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}\,dx + (M\alpha+N)\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p} =$$

$$= \frac{M}{2}\frac{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{-p+1}}{-p+1} + (M\alpha+N)I_p,$$

donde

$$I_p = \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}$$

ha de calcularse por el método de reducción:

$$I_p = \int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p} = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{\beta^2+(x-\alpha)^2-(x-\alpha)^2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\beta^2}I_{p-1} - \frac{1}{\beta^2}\int \frac{(x-\alpha)^2\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}.$$

La integral

$$\int \frac{(x-\alpha)^2\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p},$$

haciendo el cambio $x - \alpha = t$, se reduce a

$$\int \frac{t^2\,dt}{[t^2+\beta^2]^p} = \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt^2}{[t^2+\beta^2]^p} = \frac{1}{2}\int t\,d\frac{(t^2+\beta^2)^{-p+1}}{-p+1} = \frac{1}{2}\left[t\cdot\frac{(t^2+\beta^2)^{-p+1}}{-p+1} - \right.$$

$$\left. - \int \frac{(t^2+\beta^2)^{-p+1}}{-p+1}\,dt\right]$$

Deshaciendo el cambio,

$$= \frac{1}{2(1-p)}\left[\frac{x-\alpha}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-1}} - I_{p-1}\right]$$

Sustituyendo en la expresión de I_p,

$$\beta^2 I_p = I_{p-1} - \frac{1}{2(1-p)}\left[\frac{x-\alpha}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-1}} - I_{p-1}\right]$$

Agrupando, queda la ley recurrente

$$\beta^2 I_p = \frac{3-2p}{2-2p} I_{p-1} - \frac{x-\alpha}{2(1-p)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{p-1}}$$

La fórmula conseguida no se deduce en cada caso particular, sino que «se busca el libro» y se aplica.

Las raíces imaginarias múltiples del polinomio denominador son las que realmente complican el cálculo de integrales.

Para que el problema de la integración de funciones racionales esté resuelto, desde el punto de vista teórico, ha de justificar la descomposición en fracciones simples y establecer un método de cálculo de constantes. Lo primero no lo haremos, puesto que ocuparía demasiado espacio y no es problema de integración, que es de lo que se trata en el presente capítulo (si se desea, puede verse el desarrollo completo, por ejemplo, en la séptima lección de Cálculo Integral del profesor Puig Adam).

Mediante dos ejemplos, se desarrolla la forma de hallar el valor de las constantes.

Ejemplo 1

(Sin raíces imaginarias.)

$$\frac{3x^2-2x+4}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2}$$

Si se multiplican ambos miembros por $(x-1)^3$, resulta:

$$\frac{3x^2-2x+4}{x+2} = A + B(x-1) + C(x-1)^2 + D\frac{(x-1)^3}{x+2}$$

Haciendo $x = 1$ en ambos miembros,

$$\left[\frac{3x^2-2x+4}{x+2}\right]_{x=1} = \frac{5}{3} = A$$

Se deriva la expresión y se hace $x = 1$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{3x^2-2x+4}{x+2}\right]_{x=1} = \left[\frac{3x^2+12x-8}{(x+2)^2}\right]_{x=1} = \frac{7}{9} = B \cdot 1!$$

Volviendo a derivar y haciendo $x = 1$,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{3x^2 - 2x + 4}{x + 2}\right]_{x=1} = \left[\frac{(x + 2)^2(6x + 12) - (3x^2 + 12x - 8)2(x + 2)}{(x + 2)^4}\right]_{x=1} =$$

$$= \frac{40}{27} = C \cdot 2!$$

Resumiendo:

$$A = \left[\frac{3x^2 - 2x + 4}{x + 2}\right]_{x=1} = \frac{5}{3}$$

$$B = \frac{1}{1!}\frac{d}{dx}\left[\frac{3x^2 - 2x + 4}{x + 2}\right]_{x=1} = \frac{7}{9}$$

$$C = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{3x^2 - 2x + 4}{x + 2}\right]_{x=1} = \frac{20}{27}$$

Análogamente,

$$D = \left[\frac{3x^2 - 2x + 4}{(x - 1)^3}\right]_{x=-2} = -\frac{20}{27}$$

Ejemplo 2

(Con raíces imaginarias.)

$$\frac{3x - 2}{[(x - 1)^2 + 3^2](x - 1)} = \frac{Mx + N}{(x - 1)^2 + 3^2} + \frac{A}{x - 1}$$

A se obtiene según hemos visto en el primer ejemplo.

$$A = \left[\frac{3x - 2}{(x - 1)^2 + 3^2}\right]_{x=1} = \frac{1}{9}$$

Se multiplican por $((x - 1)^2 + 3^2)$ ambos miembros

$$\frac{3x - 2}{x - 1} = Mx + N + [(x - 1)^2 + 3^2]\frac{A}{x - 1}$$

Haciendo $x = 1 \pm 3i$,

$$\left(\frac{3x - 2}{x - 1}\right)_{x=1+3i} = \frac{1 + 9i}{3i} = M(1 + 3i) + N = M + N + 3Mi$$

$$1 + 9i = 3(M + N)i - 9M$$

Igualando partes reales e imaginarias, se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -9M \\ 9 = 3(M + N) \end{array}\right\} \Rightarrow M = -\frac{1}{9} \quad ; \quad N = \frac{28}{9}$$

Se proponen dos ejercicios para completar el aprendizaje inicial.

Ejercicio 1

Demostrar que $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^5}}{x + 2}\, dx$ se convierte en integral racional mediante el cambio de variable $x = t^6$.

Ejercicio 2

Generalizar al caso $\int R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}})\, dx$, haciendo el cambio $x = t^h$, con h = m.c.m. (n, q, s). (R indica función racional.)

11.12. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

Calcúlense las siguientes sesenta integrales:

1. $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$; $\int \operatorname{sen} x\, L(\cos x)\, dx$; $\int \operatorname{cotg} x\, dx$; $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$; $\int \frac{dx}{x^2 - 5}$

$$\frac{\arg \operatorname{Sh} x}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$$

2. $\int \frac{x - 7}{x^2 + 5}\, dx$; $\int \frac{3x}{2x^2 + 1}\, dx$; $\int \frac{2x + 1}{(x^2 + 2)^2}\, dx$; $\int \frac{3x - 2}{(x - 4)(x^2 + 1)}\, dx$;

$$\int \frac{2x\, dx}{\sqrt[3]{(2x^2 - 5)^2}}; \int \frac{1/x - 1}{Lx - x}\, dx$$

3. $\int (2x^{1/2} + 3)^3\, dx$; $\int \operatorname{sen}^9 x\, dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$; $\int \frac{3x - 7}{x^2 - 3x + 2}\, dx$; $\int \frac{5x\, dx}{x^2 + x + 2}$;

$$\int \frac{x^2 - 5x + 1}{(x - 1)^2(x + 3)}\, dx$$

4. $\int \frac{x^5 + 2x^4 - x^2 + 6}{(x-2)^2(x+1)}\,dx;\ \int (\operatorname{sen} x - \cos x)^2\,dx;\ \int (x^{1/2} - 1)^3\,dx;\ \int \frac{Lx}{x}\,dx;$
$\int \frac{dx}{x^2 + 7};\ \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2}\,dx$

5. $\int \frac{2x + 3}{(x-1)^2 + 4}\,dx;\ \int \frac{x + 3}{x^2 - 2x + 2}\,dx;\ \int \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 dx;\ \int \sqrt[3]{(mt + n)^5}\,dt$
$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{d\omega}{\cos^2(2\omega - \pi/2)};\ \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,sen} y}{\sqrt{1 - y^2}}\,dy$

6. $\int_0^{1/3} \frac{dx}{1 + (3x-1)^2};\ \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^5\varphi}\,d\varphi;\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2 + 1}};\ \int x^m\,Lx\,dx;$
$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx;\ \int_0^{\pi/6} \operatorname{tg} x\,dx$

7. $\int_0^1 \operatorname{arc\,sen} x\,dx;\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}};\ \int \frac{dx}{\sqrt{-a^2 + x^2}};\ \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}};\ \int \frac{dx}{x^2 \pm a^2};$
$\int x \cdot a^{kx}\,dx$

8. $\int (\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg} x + 3)\frac{1}{\cos^2 x}\,dx;\ \int \operatorname{sen}^3 x\,dx;\ \int \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx;$
$\int \cos^{2n+1} x\,dx;\ \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx;\ \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}}$

9. $\int \frac{dx}{\operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} x};\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 \pm x^2}};\ \int \operatorname{Th} x\,dx;\ \int (Lx)^n\,dx;\ \int x^m a^x\,dx;\ \int x \cos dx$

10. $\frac{x\,dx}{\cos^2 3x};\ \int \operatorname{arc\,cos} 2x\,dx;\ \int x^2\sqrt{1 - x}\,dx;\ \int x \cdot \operatorname{arc\,tg} x\,dx;\ \int \operatorname{sen}(Lx)\,dx;$
$\int x^2 e^{-3x}\,dx$

12

Area. Integral definida. Aplicaciones

12.1. INTRODUCCION

El cálculo integral tiene como objeto el estudio de la integral definida. La integral indefinida o función primitiva se incluye en el cálculo diferencial.

El cálculo integral requiere unas nociones previas sobre área, pues la integral definida es la medida de un área.

Ahora bien, sobre el concepto de área, que está incluido dentro de la teoría general de la medida, existe más de una definición. Por tanto, tendremos un tipo u otro de integral, según la definición adoptada para el área.

Sin descender a detalles, que se saldrían del marco de este libro, vamos a esquematizar en el apartado siguiente el problema del área, y las definiciones de Jordan y Lebesgue.

Después se estudiará la integral de Riemann y regla de Barrow, que relaciona el cálculo diferencial con el integral, para terminar exponiendo los métodos de cálculo de áreas y volúmenes sencillos.

12.2. MEDIDA DE AREAS DE REGIONES POLIGONALES

Cuando hablamos del área de una figura nos referimos a su extensión o tamaño. Medir el área es medir el tamaño del conjunto de puntos del plano que forman la figura.

Es corriente definir el área del círculo como el límite de las áreas de los polígonos inscritos, cuando el número de lados crece indefinidamente. En este caso, para definir el área del círculo, se hace uso de las áreas de otras figuras más sencillas: los polígonos.

El área de un polígono está definida a partir del área del triángulo, pues basta descomponer el polígono en triángulos rampantes y sumar sus áreas. Se demuestra que, aunque hay muchas descomposiciones de este tipo, el valor del área es único.

Es más, a partir del área del triángulo se puede definir el área de cualquier región poligonal, incluso no conexa, descomponiendo en triángulos rampantes. Sirva de ejemplo el conjunto formado por las dos zonas rayadas de la figura 12.1.

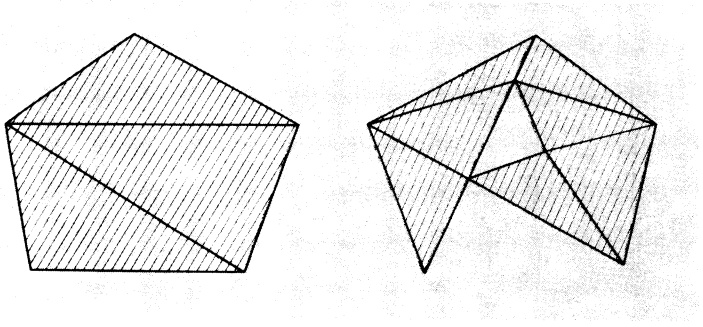
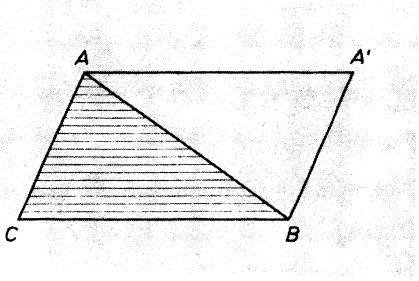


Fig. 12.1

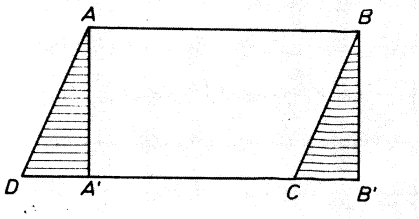
El área del triángulo se define a partir del área del paralelogramo.



Area $\overset{\frown}{ABC}$ = 1/2 área paralelogramo $AA'BC$.

Fig. 12.2

El área del paralelogramo se define a partir del área del rectángulo.



Area paralelogramo $ABCD$ = = área rectángulo $ABB'A'$

Fig. 12.3

El área del rectángulo, cuando se toma como unidad el cuadrado de lado unitario, se obtiene multiplicando las longitudes de sus lados. Este resultado se conoce de la geometría elemental.

En toda la exposición se está haciendo uso, sin explicitarlos, de los siguientes postulados:

1.º Dos figuras congruentes tienen igual área. (Congruentes quiere decir que se pueden llevar a coincidir mediante un movimiento.)
2.º Si F_1 y F_2 son figuras rampantes (en el sentido de que su intersección es vacío o puntos frontera), el área de su reunión es la suma de las áreas.

12.3. EL PROBLEMA GENERAL DEL AREA

Como se ha visto, la obtención del área de una región poligonal es fácil. Se ha pensado en tomar las áreas de estos conjuntos de puntos como «áreas básicas», a partir de las cuales se definen las áreas de otros conjuntos de puntos más complejos, como el círculo.

No obstante, cuando se intenta encontrar una definición general de área, se ha podido constatar que no son los polígonos las figuras básicas o elementales más adecuadas para definir a partir de ellas el área de las demás figuras.

El conjunto elemental que ha tenido más éxito es el rectángulo-suma y su generalización, el rectángulo-serie. El primero está formado por una reunión finita de rectángulos rampantes y de lados paralelos.

Ejemplo de rectángulo-suma es el de la figura 12.4.

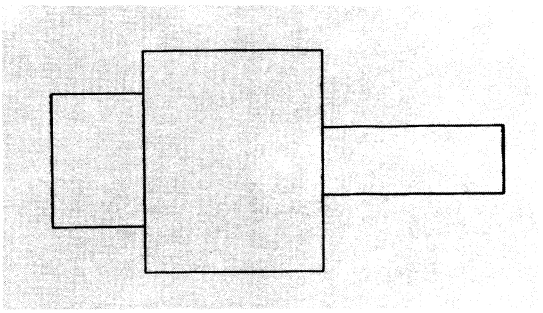


Fig. 12.4

El rectángulo-serie es un rectángulo-suma con un número infinito de rectángulos.

El área del rectángulo-suma (o serie) es la suma de las áreas de los rectángulos que lo componen.

La definición de área ha de ser tal que comprenda la mayor cantidad posible de conjuntos del plano como conjuntos dotados de área. Si el plano se representa por Π, lo ideal sería que todo subconjunto de Π, o sea, todo elemento de la clase $\mathcal{P}(\Pi)$ de partes de Π, tuviera área. Se puede probar que esto no es posible.

Si los conjuntos con área se incluyen en la clase $\mathfrak{A}(\Pi)$, resulta que el área es una aplicación de $\mathfrak{A}(\Pi) \xrightarrow{A} \mathfrak{R}$ que verifica los postulados siguientes:

1. $A(F) \geq 0$.
2. Si F_1 es congruente con F_2, entonces tienen igual área, $A(F_1) = A(F_2)$.
3. $A(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) = A(F_1) + A(F_2) + \cdots + A(F_n)$, donde F_1, F_2 $\cdots$ F_n son conjuntos rampantes, dos a dos.

4. $\mathfrak{A}(\Pi) \supset \mathfrak{E}(\Pi)$, donde $\mathfrak{E}(\Pi)$ es la clase de conjuntos elementales (polígonos, rectángulos-suma o serie) que nos sirven para definir el área de cualquier figura. El área, tal como se defina, ha de coincidir, para los conjuntos de $\mathfrak{E}(\Pi)$, con su área elemental.

El que la noción de área sea suficientemente potente, depende del éxito en la elección de los conjuntos elementales $\mathfrak{E}(\Pi)$, y en la definición de $A(F)$, a partir de los mismos.

12.4. DEFINICIONES DE AREA

12.4.1. Definición de área según Jordan

Jordan toma como conjuntos fundamentales los rectángulos-suma.
Contenido exterior de $F = C_e(F) = \inf_{S \supset F} A(S)$;

es decir, el ínfimo o extremo inferior de las áreas de todos los rectángulos-suma que contienen a F.

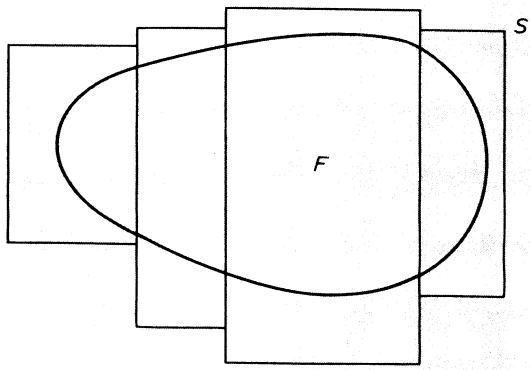


Fig. 12.5

Contenido interior de $F = C_i(F) = \sup_{S \subset F} A(S)$;

es decir, el supremo o extremo superior de las áreas de todos los rectángulos-suma contenidos en F (Fig. 12.6).

Cuando coinciden los contenidos interior y exterior se dice que F tiene contenido o área, en el sentido de Jordan. La clase de los conjuntos que tienen área de Jordan en el plano Π se representará $\mathscr{J}(\Pi)$.

$$\mathscr{J}(\Pi) \xrightarrow{C} \mathscr{R}$$
$$F \longrightarrow C(F) = \sup_{S \subset F} A(S) = \inf_{S \supset F} A(S)$$

Se comprueba que esta aplicación verifica los cuatro postulados del apartado anterior.

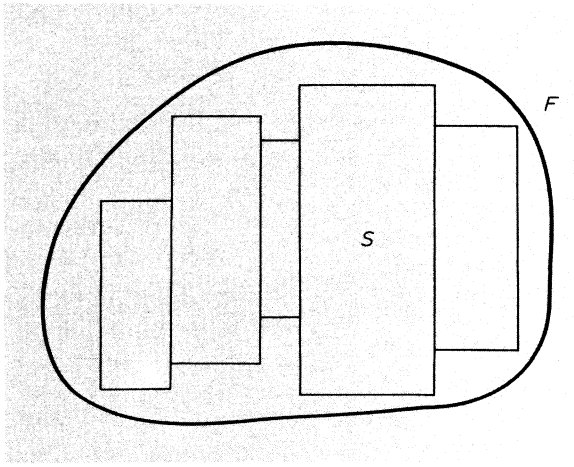


Fig. 12.6

12.4.2. Definición de área según Lebesgue

Lebesgue toma como conjuntos fundamentales los rectángulos-serie. En consecuencia, ha de modificar el postulado 3 (aditividad) en el sentido de ampliarlo a un número infinito de sumandos (aditividad completa).

Medida exterior de $F = m_e(F) = \inf_{\Sigma \supset F} A(\Sigma)$;

es decir, el ínfimo de las áreas de todos los rectángulos-serie que contienen a F.

Medida interior de $F = m_i(F) =$ área de $R_1 - m_e(R_1 - A)$

R_1 es un rectángulo que contiene a A.

Se demuestra que el valor de $m_i(F)$ es independiente de R_1.

Cuando coinciden las medidas interior y exterior, se dice que F tiene medida o área en el sentido de Lebesgue. La clase de los conjuntos que tienen área de Lebesgue en el plano Π se representa $\mathfrak{L}(\Pi)$.

$$\mathfrak{L}(\Pi) \xrightarrow{m} \mathfrak{R}$$
$$F \longrightarrow m(F) = m_i(F) = m_e(F)$$

Se comprueba que la aplicación anterior verifica los cuatro postulados (el 3.º en condiciones menos restrictivas, con infinitos sumandos).

Es fácil ver que $\mathfrak{J}(\Pi) \subset \mathfrak{L}(\Pi)$, habida cuenta de que se verifican las siguientes desigualdades:

$$C_i(F) \leq m_i(F) \leq m_e(F) \leq C_e(F);$$

o sea, todo conjunto con área de Jordan tiene área de Lebesgue, y además, ambas son iguales. La teoría de Lebesgue es más fina que la de Jordan, pero compatible con ella.

12.5. INTEGRAL DEFINIDA

Sea una función $y = f(x)$, definida en un sobreconjunto del intervalo $[a, b]$.

Se llama *integral definida de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$* al área de la porción de plano limitada por la gráfica de la función, el eje x y las paralelas por $x = a$ y $x = b$ al eje y.

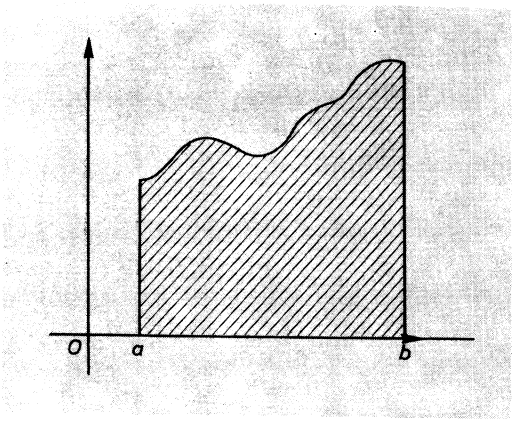


Fig. 12.7

Si el área que se considera es el área de Jordan, la integral definida se llama *de Riemann.*

Análogamente, si se contempla el área de Lebesgue, la integral definida se denomina *de Lebesgue.*

Si la porción de plano citada no tiene área, se dice que la función no es integrable. Hay funciones que no son integrables en el sentido de Riemann por no existir el área de Jordan, y, sin embargo, sí que lo son en el sentido de Lebesgue, por existir el área de Lebesgue.

Ejemplo

Sea la función definida en [0, 1], tal que

$$f(x) = 1, \text{ para } x = \text{número racional}$$
$$f(x) = 2, \text{ para } x = \text{número irracional}$$

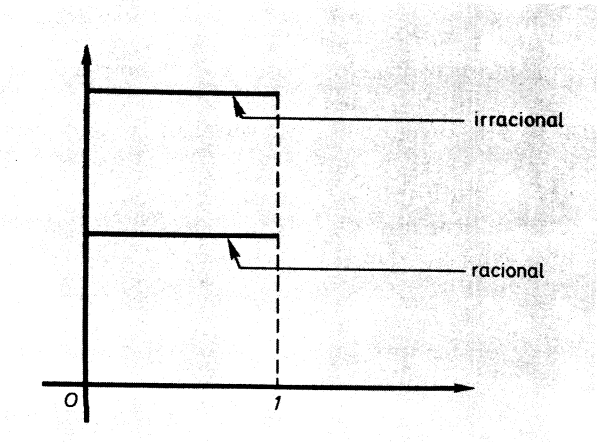


Fig. 12.8

Esta función no es integrable Riemann, pues $c_i = 1$; $c_e = 2$, pero sí es integrable Lebesgue, pues $m_i = m_e = 2$.

La integral de Lebesgue es más precisa que la integral de Riemann. No obstante, en la mayoría de los casos es suficiente con esta última que, si existe, coincide con la primera.

12.6. INTEGRACION DE RIEMANN DE UNA FUNCION CONTINUA, POSITIVA Y MONOTONA

Vamos a razonar sobre una función monótona creciente, teniendo en cuenta que el razonamiento es válido también para una monótona decreciente.

Sea la función $y = f(x)$ definida en $[a, b]$.

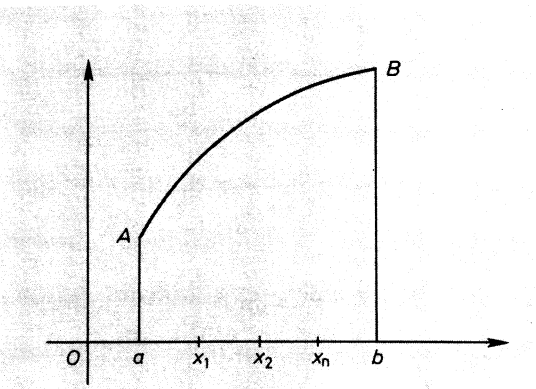


Fig. 12.9

La integral de Riemann será el área de Jordan de la porción de plano que limita el trapecio mixtilíneo *aABb*, en el supuesto de que exista.

Se representa

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Llamaremos una partición de $[a, b]$ a un conjunto $x_1, x_2 \ldots x_n$ de puntos de $[a, b]$.

Al numerar mediante subíndices los puntos de la partición, indicamos por x_1 el más próximo a a, x_2 el que le sigue, etc., hasta x_n, que es el más próximo a b (esto independiente de que $a < b$ o $a > b$).

A cada partición se hace corresponder un rectángulo-suma, cuya área designaremos s, contenido en el trapecio mixtilíneo (en la figura 12.10 marcado en grueso).

Según el mismo criterio, se obtiene un rectángulo-suma de área S (en la figura 12.10 marcado en fino) que contiene el trapecio.

I. Si s y S proceden de la misma partición, se verifica que $s \leq S$, pues basta ver las figuras gruesa y fina. Además se puede comprobar analíticamente, ya que

$$f(a) \leq f(x_1) \leq \ldots \leq f(x_n) \leq f(b)$$

por la condición de monotonía.

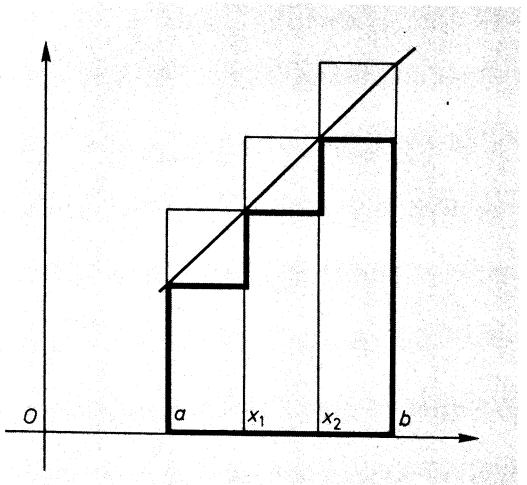


Fig. 12.10

$$s = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}) + (b - x_n)f(x_n)$$
$$S = (x_1 - a)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_n) + (b - x_n)f(b)$$

II. Si a una partición se le añaden nuevos puntos, obtenemos un área $s \leq s'$. Añadir el punto x', equivale a aumentar s en el área rayada (Fig. 12.11).

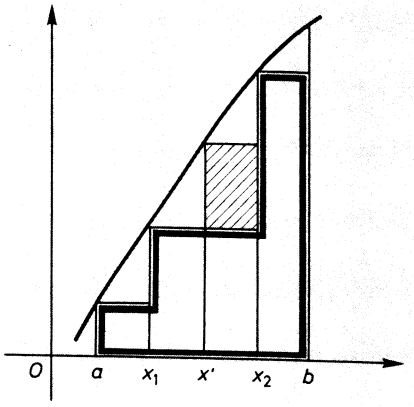


Fig. 12.11

Analíticamente se comprueba que añadir x' a la partición equivale a sustituir en las sumas el término

$$(x_2 - x_1)f(x_1) = (x_2 - x')f(x_1) + (x' - x_1)f(x_1)$$

por

$$(x_2 - x')f(x') + (x' - x_1)f(x_1)$$

que es mayor, puesto que

$$f(x') \geq f(x_1)$$

III. Si a una partición se le añaden nuevos puntos, obtenemos un área $S' \leq S$. Añadir el punto x' equivale a disminuir S en el área rayada (Fig. 12.12):

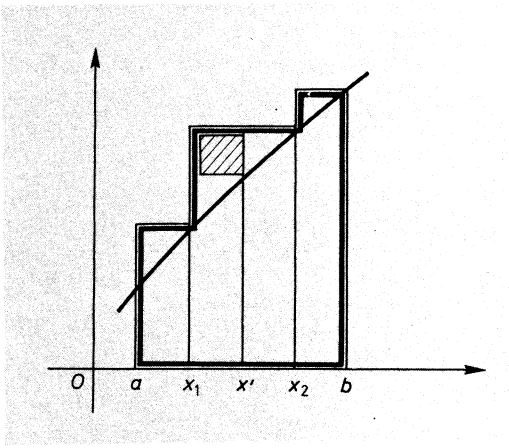


Fig. 12.12

Analíticamente se comprueba que añadir x' a la partición equivale a sustituir en la suma S el término

$$(x_2 - x_1)f(x_2) = (x_2 - x')f(x_2) + (x' - x_1)f(x_2)$$

por

$$(x_2 - x')f(x_2) + (x' - x_1)f(x')$$

que es menor, puesto que

$$f(x') \leq f(x_2)$$

IV. Cualquier $s \leq S$.

En efecto:

Si s y S pertenecen a la misma partición, está claro que $s \leq S$, por *I*.

Si s y S pertenecen a distinta partición, se forma la partición compuesta, es decir, la que tiene los puntos de ambas. A esta partición compuesta le corresponden s'' y S''.

Resulta:

$$s'' \leq S'' \text{ por I}$$
$$s \leq s'' \text{ por II}$$
$$S'' \leq S \text{ por III};$$

luego

$$s \leq s'' \leq S'' \leq S,$$

o sea,

$$s \leq S, \qquad \text{c. q. d.}$$

V. Las s están acotadas superiormente por cualquier S, luego existe sup s.
Las S están acotadas inferiormente por cualquier s, luego existe inf S.
Si se pretende demostrar que existe la integral de Riemann, se ha de demostrar que inf S = sup s, para lo cual basta comprobar que existen s y S, que difieren tan poco como se desee.
Vamos a obtener dos sucesiones s_n y S_n, tales que $\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0$.
En las gráficas *a*, *b*, *c* de la figura 12.13 considérense los rectángulos-suma que resultan de dividir $[a, b]$ en 1, 2, 2^2, 2^3 ... partes iguales.

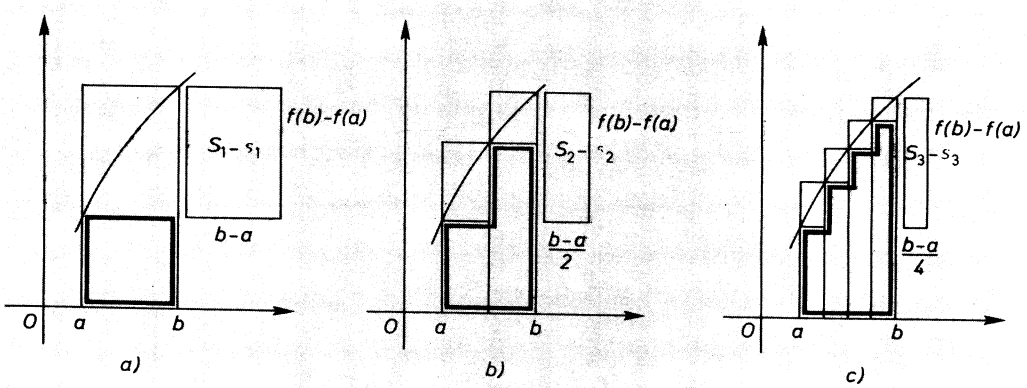


Fig. 12.13

Las áreas cuyos perímetros están marcados en grueso se designarán s_1, s_2 ...
Y las áreas cuyos perímetros están marcados en fino, por S_1, S_2 ... Se tiene

$$S_1 - s_1 = (b - a)\,(f(b) - f(a))$$
$$S_2 - s_2 = \frac{b - a}{2}\,(f(b) - f(a))$$
$$S_3 - s_3 = \frac{b - a}{2^2}\,(f(b) - f(a))$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n - s_n = \frac{b - a}{2^{n-1}}\,(f(b) - f(a))$$

Es evidente que $\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(b - a)\,(f(b) - f(a))}{2^{n-1}} = 0$

Como existen s_n y S_n, que difieren tan poco como se desee, resulta que

$$\inf S = \sup s = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{c.q.d.}$$

12.7. INTEGRACION DE UNA FUNCION MONOTONA, CONTINUA Y NEGATIVA

Si nos fijamos en las expresiones de s y S, resulta que, en el supuesto de que $f(x)$ fuese una función continua monótona y *negativa*, s y S serían negativas.

Hemos definido la integral de Riemann como el área de Jordan del trapecio mixtilíneo, y un área es esencialmente positiva. Ahora bien, el área es

$$\int_a^b f(x) = \inf S = \sup s,$$

siempre que la función sea monótona positiva. Podemos generalizar y definir la integral mediante la misma expresión, aunque $f(x)$ sea negativa, prescindiendo de que en este caso s y S serán negativas y, por tanto, también $\inf S = \sup s$.

Así, pues, si $f(x)$ es función continua y monótona, se define:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf S = \sup s,$$

tanto si $f(x)$ es positiva como negativa.
Si $f(x)$ es positiva,

$\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área del trapecio mixtilíneo.

Si $f(x)$ es negativa,

$\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área del trapecio mixtilíneo, pero con signo negativo.

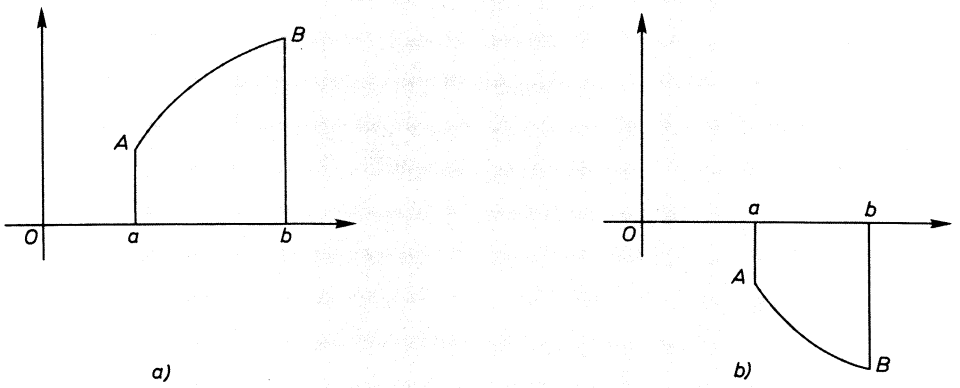


Fig. 12.14

$$\text{Area } aABb = \int_a^b f(x)\,dx \text{ (Gráfica } a) \text{ de la figura 12.14)}$$

$$\text{Area } aABb = -\int_a^b f(x)\,dx \text{ (Gráfica } b) \text{ de la figura 12.14)}$$

Ejercicio

Con la definición anterior, demuéstrese que

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

12.8. INTEGRACION DE UNA FUNCION CONTINUA

Si la función es positiva, se descompone en trozos en los que sea monótona,

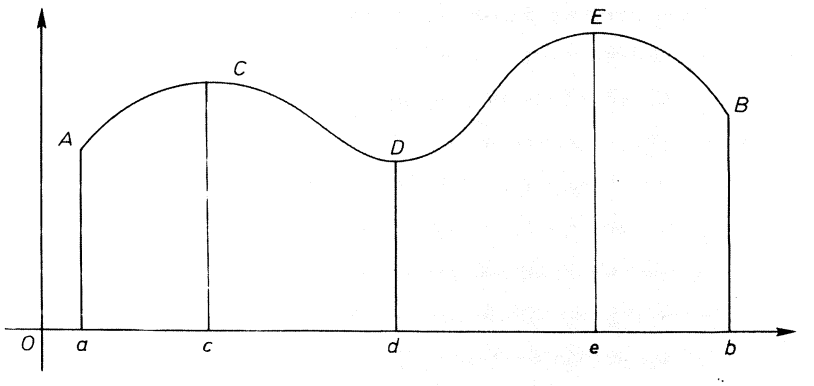


Fig. 12.15

según el número 12.6.

$$\text{área } aACc = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\text{área } cCDd = \int_c^d f(x)\,dx$$

$$\text{área } dDEe = \int_d^e f(x)\,dx$$

$$\text{área } eEBb = \int_e^b f(x)\,dx$$

Por la propiedad aditiva del área de Jordan,

$$\text{área } aABb = \text{área } aACc + \text{área } cCDd + \text{área } dDEe + \text{área } eEBb = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^e f(x)\,dx + \int_e^b f(x)\,dx;$$

pero área $aABb$, que como vemos existe, es igual a

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Aunque la función fuera negativa, es válido lo anterior con el convenio establecido en el número anterior.

Resumiendo: Toda función continua es integrable Riemann.

El valor de la integral representa la suma de las áreas A_1, A_2, A_3, con su signo

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

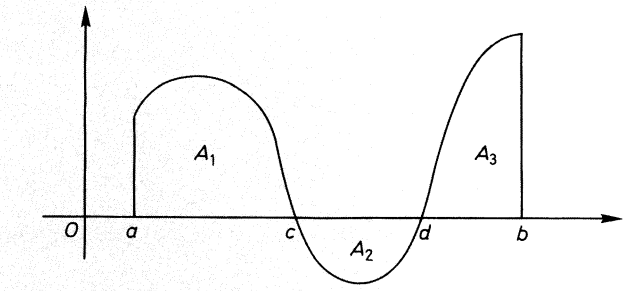


Fig. 12.16

12.9. TEOREMA DE BARROW

Supóngase la función continua $f(x)$, y considérese la integral de Riemann $A(X) = \int_a^X f(x)\,dx$, donde el extremo X de la integral permanece variable.

Se obtiene así, una función de X que llamaremos $A(X)$.

Consideremos $\Delta A = A(X + \Delta X) - A(X)$

$$\Delta A = XBB'(X + \Delta X) \text{ (trap. mixt.)}$$

ΔA está comprendido entre las áreas de los rectángulos señalados en trazos grueso y fino, en la figura 12.17.

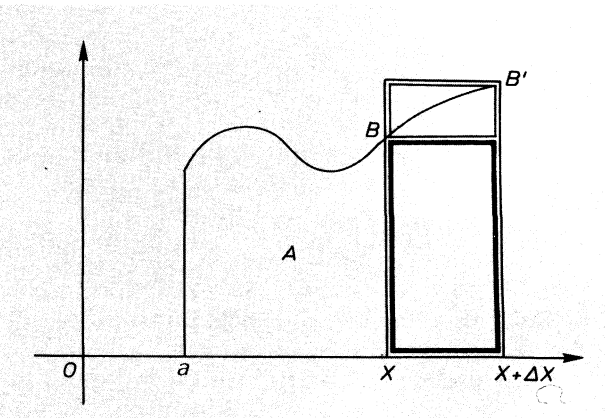


Fig. 12.17

$$\underbrace{\boxed{\Delta X \cdot f(X)}}_{\text{área rectángulo}} \leq \Delta A \leq \underbrace{\boxed{\Delta X \cdot f(X + \Delta X)}}_{\text{área rectángulo}}$$

$$f(X) \leq \frac{\Delta A}{\Delta X} \leq f(X + \Delta X)$$

Como $f(X)$ es continua, por hipótesis, se verifica que $\lim_{X \to 0} f(X + \Delta X) = f(X)$, por tanto, $\dfrac{\Delta A}{\Delta X}$ tenderá al mismo límite, o sea,

$$\lim_{X \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta X} = A'(X) = f(X).$$

Como este razonamiento es válido para cualquier X, se puede escribir $A'(X) = f(X)$.

Esta relación constituye el teorema de Barrow.

Dicta que la integral $\int_a^x f(x)\,dx$ es una primitiva de $f(x)$; es decir, relaciona el Cálculo Integral con el Cálculo Diferencial.

Sea $F(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$. Como dos primitivas difieren en una constante, será $A(X) = F(X) + C$, es decir: $\int_a^X f(x)\,dx = F(X) + C$; pero, para $X = a$, resulta $0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$, luego

$$\boxed{\int_a^X f(x)\,dx = F(X) - F(a)}$$

que es la clásica regla de Barrow.

12.10 FUNCIONES DEFINIDAS POR INTEGRALES

Hemos visto que toda función continua es integrable Riemann, pero no son las únicas, como se verá en el apartado siguiente.

Si existe $A(X) = \int_a^X f(x)\,dx$, se puede considerar $A(x) = \int f(x)\,dx$, según el teorema de Barrow. Es decir, que el problema de hallar la primitiva de $f(x)$ ha quedado reducido al problema de hallar un área.

La función primitiva es precisamente la función área; y si la primitiva no existe, como combinación de funciones elementales, sí existe como área.

Aquí es donde se ve lo que quedó dicho en el capítulo anterior: que el cálculo integral aporta nuevas funciones al análisis matemático.

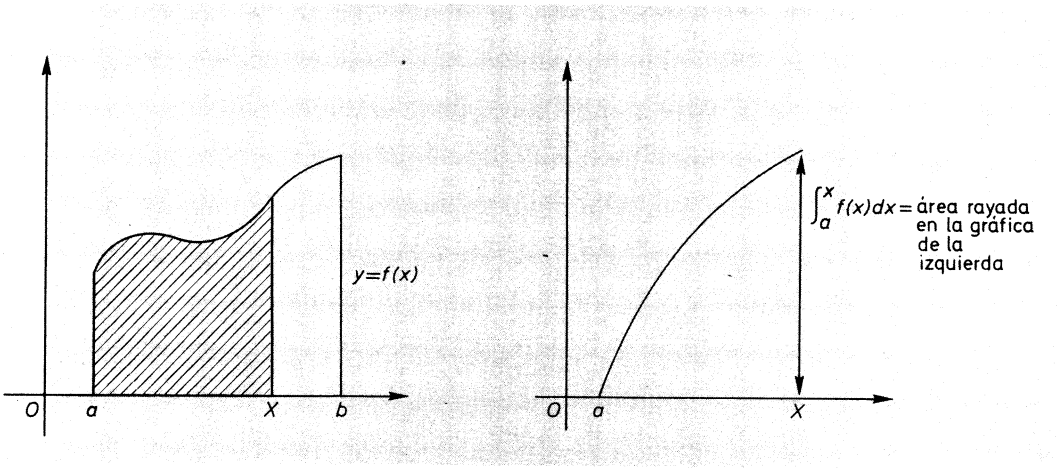


Fig. 12.18

12.11. INTEGRACION DE RIEMANN DE FUNCIONES NO CONTINUAS

Sea la función $f(x)$ con un número finito de puntos de discontinuidad. En la figura 12.19, son los puntos $x = c$ y $x = d$.

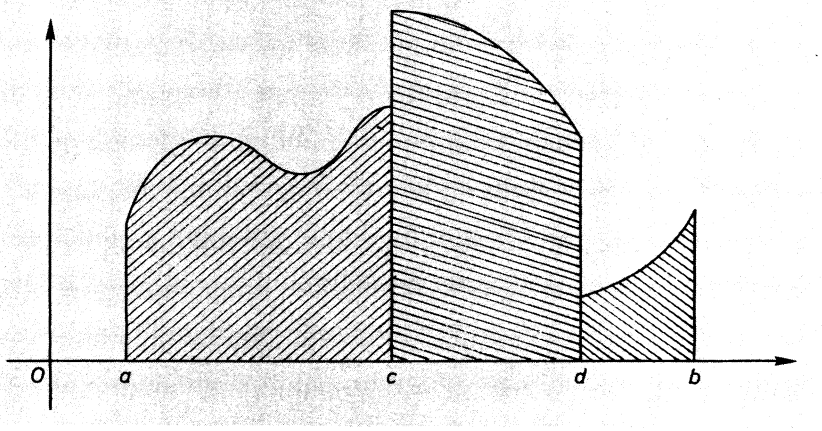


Fig. 12.19

Es evidente que existen las integrales de los trozos continuos

$$\int_a^c f(x)\,dx, \int_c^d f(x)\,dx, \int_d^b f(x)\,dx$$

Por la aditividad del área de Jordan resulta que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{área rayada} = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

Es decir, *toda función con un número finito de discontinuidades es integrable Riemann.*

$$\text{La función} \begin{cases} f(x) = 1 \text{ para } x \in [0, 1] - \left\{ 1 - \frac{1}{n};\ n = 2, 3, \ldots \right\} \\ f(x) = 3/2 \text{ para } x = 1 - \frac{1}{n};\ n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

también es integrable Riemann en [0, 1], y tiene un número infinito de discontinuidades

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

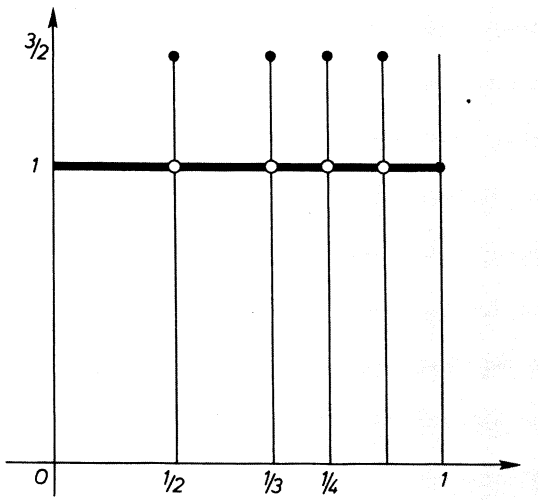


Fig. 12.20

La idea que hemos querido desarrollar en este apartado es que las funciones continuas no son las únicas integrables Riemann.

12.12. ELEMENTOS DIFERENCIALES DE LONGITUDES, AREAS Y VOLUMENES

Al objeto de poder calcular áreas y volúmenes sencillos, vamos a escribir las expresiones de los distintos elementos diferenciales.

Ya sabemos que la diferencial es la parte principal del incremento, o sea, que la diferencial diferirá del incremento en un infinitésimo de orden mayor o igual que 2.

En las figuras que siguen, los elementos diferenciales se dibujan de trazo grueso y los incrementos de trazo fino.

1. *Elemento diferencial de área*

$$dA = y\,dx$$
$$|\Delta A - dA| < (tg\alpha) \cdot (dx)^2$$

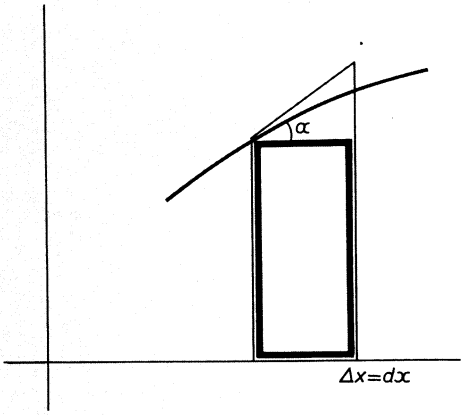


Fig. 12.21

2. *Elemento diferencial de arco*

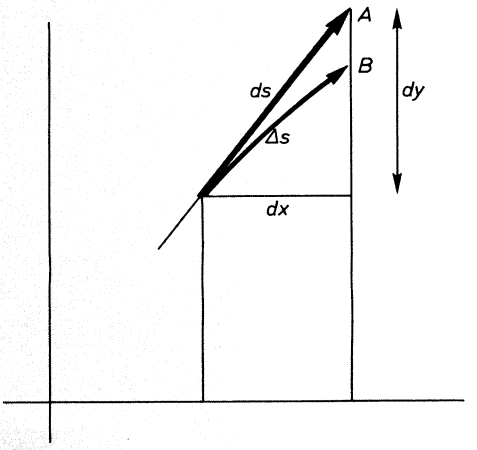
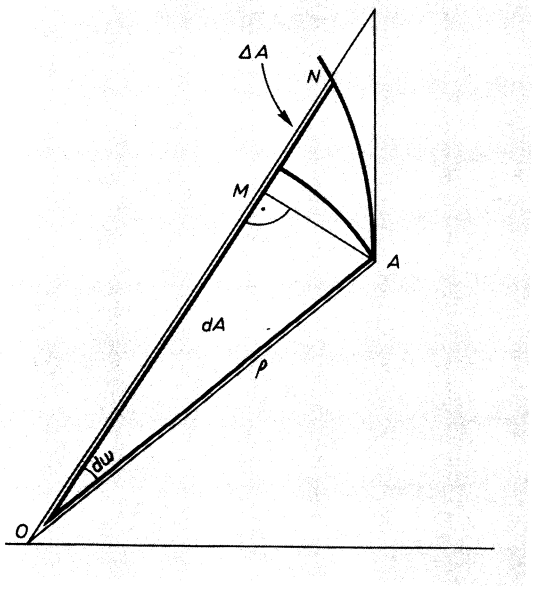


Fig. 12.22

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx =$$
$$= \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$
$$|ds - \Delta s| < AB = k(dx)^2$$

3. *Elemento diferencial de área con coordenadas polares*

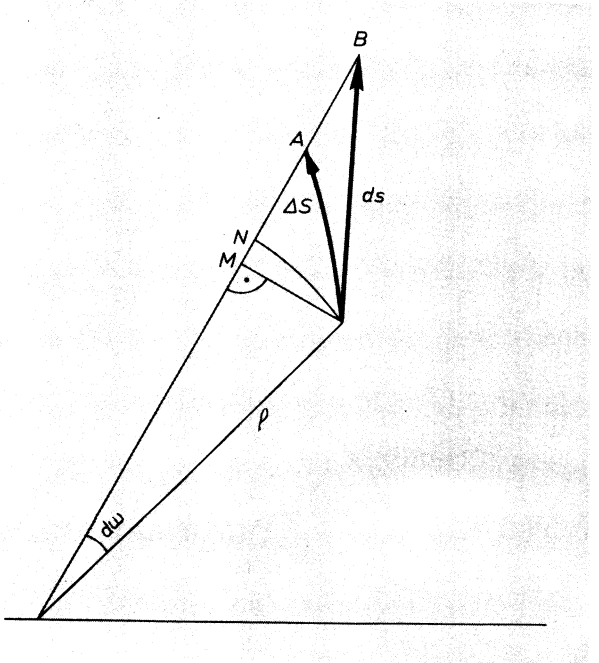


$$dA = 1/2\ \rho^2\ d\omega$$

Fig. 12.23

$|\Delta A - dA| <$ área $\overset{\frown}{AMN}$, y se puede comprobar que área $\overset{\frown}{AMN} = k(d\omega)^2$, o sea, un infinitésimo de orden superior a dA.

4. *Elemento diferencial de arco en coordenadas polares*



$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho\ d\omega)^2}$$
$$= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\ d\omega$$
$$|ds - \Delta s| < AB = k(d\omega)^2$$

Fig. 12.24

5. *Elemento diferencial de volumen de revolución*

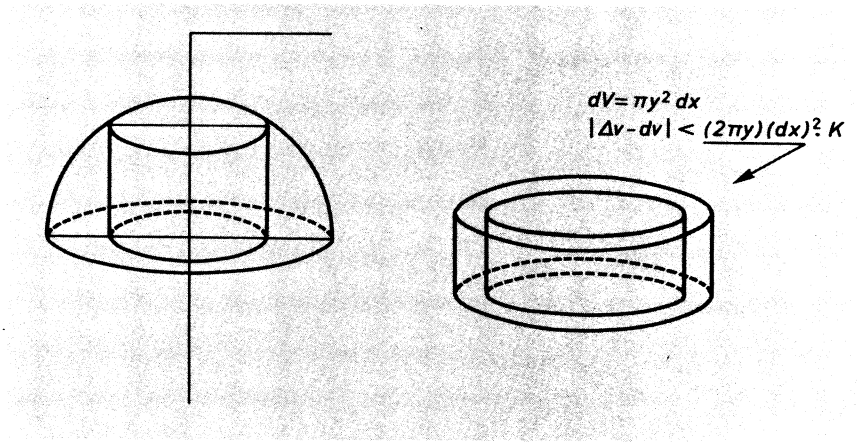


Fig. 12.25

6. *Elemento diferencial de área de revolución*

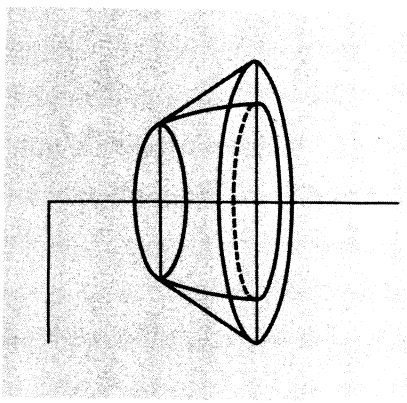


Fig. 12.26

$$dS = 2\pi y\, ds + \frac{(ds)^2}{2} \simeq 2\pi y\, ds$$

$$|\Delta S - ds| < 2\pi y\, ds - 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi\, y \left[\sqrt{1 + y'^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \right] dx$$

La parte del corchete es infinitésimo, luego

$$|\Delta S - ds| < k(dx)^2$$

12.13. APLICACIONES

Antes de pasar al desarrollo de algunos ejemplos de cálculo de áreas, volúmenes y longitudes, recuérdese que toda función es una curva pero no recíprocamente. Se puede decir que toda curva es una colección de funciones.

La ecuación de una curva puede representarse en tres formas:

a) *explícita.* Es la que ya conocemos $y = f(x)$.
Por ejemplo, la recta $y = 2x + 3$; la parábola $y = 3x^2$.

b) *implícita.* Es una relación entre x e y, $f(xy) = 0$.
Por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x = 0$, o bien la recta $3x + y - 7 = 0$.

c) *paramétrica.* Es la expresión de x e y en función de un parámetro t, o sea,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Ejemplos: la recta

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 4 \end{cases}$$

la circunferencia

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \operatorname{sen} t \end{cases}$$

El paso de una expresión a otra no tiene, teóricamente, dificultad.

1. *Volumen de la esfera de radio R* (bola esférica).

$$x^2 + y^2 = R^2;\ dV = \pi y^2\, dx = \pi(R^2 - x^2)\, dx$$

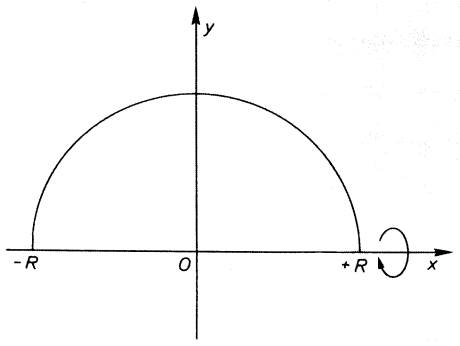


Fig. 12.27

$$V = \int_{-R}^{+R} dV = \int_{-R}^{+R} \pi(R^2 - x^2)\, dx = \pi \left| R^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_{-R}^{+R} =$$

$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 4/3\pi R^3$$

2. *Area de la esfera de radio R*

Es el área de revolución de la misma circunferencia anterior.

$dS = 2\pi y\, ds$; pero si

$$y = \sqrt{R^2 - x^2};\ y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx$$

luego,

$$dS = 2\pi y\, ds = 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\, \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi R\, dx$$

$$S = \int_{-R}^{+R} dS = \int_{-R}^{+R} 2\pi R\, dx = \left| 2\pi R x \right|_{-R}^{+R} = 4\pi R^2$$

3. *Area encerrada por la lemniscata*: $\rho^2 = 2c^2 \cos 2\omega$

Es el lugar de los puntos M tales que $MF \times MF' = 2c^2$, siendo F, F' tales que $FF' = 2c$

$$1/4\ A = \int_0^{\pi/4} 1/2\ \rho^2\, d\omega = \int_0^{\pi/4} c^2 \cos 2\omega\, d\omega =$$

$$= c^2 \left| \frac{\operatorname{sen} 2\omega}{2} \right|_0^{\pi/4} = \frac{c^2}{2} \Rightarrow A = 2c^2$$

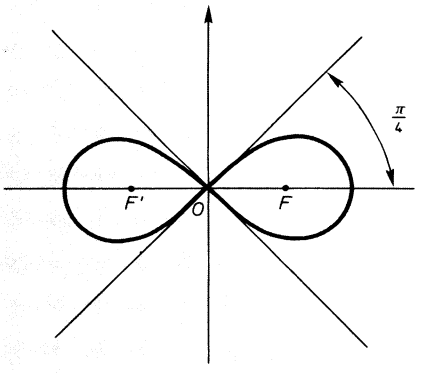


Fig. 12.28

4. *Area encerrada por la elipse*

$$\left.\begin{aligned} x &= OQ' = OQ \cdot \cos t = a \cos t \\ y &= MQ' = PP' = OP \operatorname{sen} t = b \operatorname{sen} t \end{aligned}\right\}$$

La curva de ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \operatorname{sen} t \end{aligned}\right\}$$

es una elipse de semiejes a y b, pues

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

como es fácil de comprobar.

$$dA = y\,dx = b \operatorname{sen} t\, a(-\operatorname{sen} t)\,dt = -ab \operatorname{sen}^2 t\,dt$$
$$\cos 2t = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow -\operatorname{sen}^2 t = 1/2\,(\cos 2t - 1);$$

luego

$$dA = \frac{ab}{2}(\cos 2t - 1)\,dt.$$

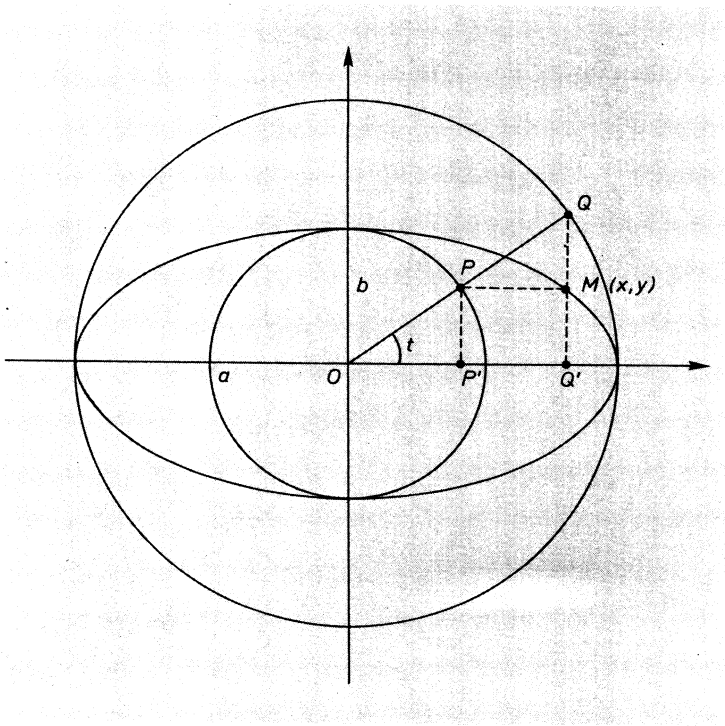


Fig. 12.29

El área del primer cuadrante será

$$1/4A = \int_{\pi/2}^{0} \frac{ab}{2}(\cos 2t - 1)\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left|\frac{\operatorname{sen} 2t}{2} - t\right|_{\pi/2}^{0} = \frac{\pi ab}{4}$$

luego

$$A = \pi ab.$$

B para $t = \dfrac{\pi}{2}$

C para $t = 0$

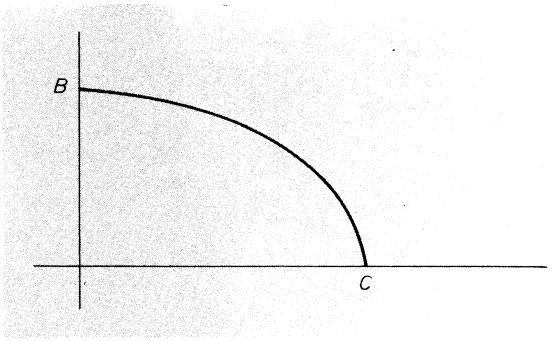


Fig. 12.30

Si $a = b = R$, la elipse se convierte en el círculo de radio R y su área será πR^2.

5. *Longitud de un arco de catenaria*

Queremos hallar la longitud de la curva $y = \operatorname{Ch} x$ entre el punto A de abscisa $=0$, y el punto B de abscisa $=2$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2 x}\,dx = \operatorname{Ch} x\,dx$$

$$S = \int_0^2 \operatorname{Ch} x\,dx = |\operatorname{Sh} x|_0^2 = \operatorname{Sh} 2 - \operatorname{Sh} 0 = \operatorname{Sh} 2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$$

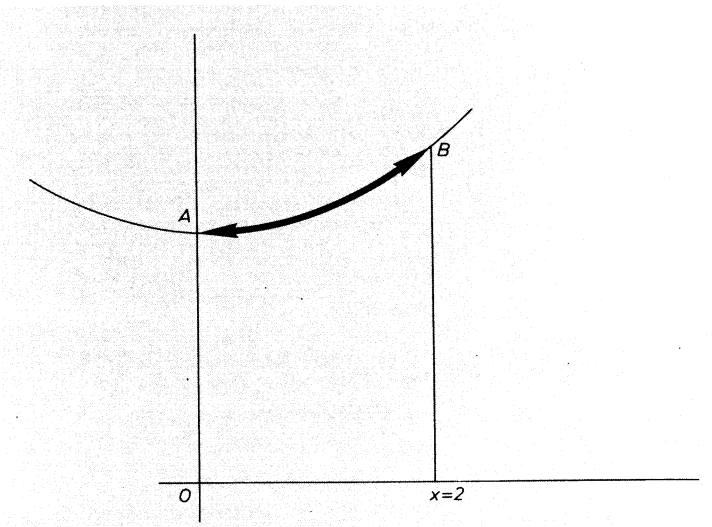


Fig. 12.31

6. *Area de la parte rayada*

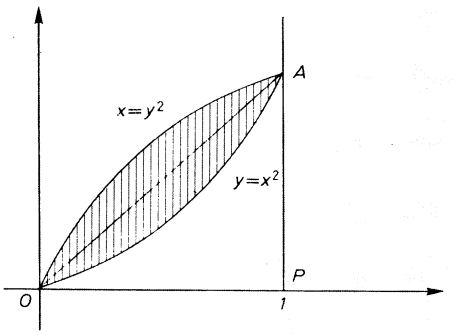


Fig. 12.32

$$1/2\ A = A_{\overset{\frown}{OAP}} - \int_0^1 y\,dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 x^2\,dx =$$
$$= \frac{1}{2} - \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Luego

$$A = \frac{1}{3}$$

12.14. METODOS NUMERICOS DE INTEGRACION. GENERALIDADES. METODO DE NEWTON-COTES

Supóngase que se desea calcular la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, de la que se sabe que existe, porque la función $f(x)$ es integrable Riemann; pero no es posible encontrar una primitiva de $f(x)$ expresable por medio de las funciones elementales, por lo que no se puede aplicar la regla de Barrow.

En este supuesto son útiles los llamados «métodos de integración numérica», que, en esencia, consisten en sustituir la función integrando, $f(x)$, por otra que se le aproxime y de fácil integración.

La función $f(x)$ puede aproximarse por la función de interpolación de Newton:

$$p(x) = p(x_0 + ht) = y_0 + t\frac{\Delta y_0}{1!} + t(t-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \cdots$$
$$\cdots + t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)\frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

Para la aplicación de esta fórmula se necesitan sólo los valores de $f(x)$ en $n + 1$ puntos equidistantes entre a y b (Fig. 12.33).

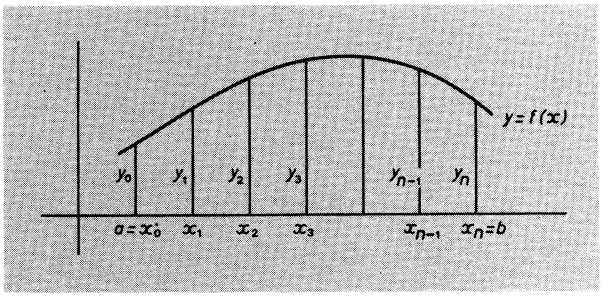


Fig. 12.33

La integral buscada es:

$$\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^n f(x_0 + ht)\,dt \approx \int_0^n p(x_0 + ht)\,dt =$$

$$= \int_0^n \left(y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0\right) dt$$

$$x = x_0 + ht \quad , \quad dx = h\,dt$$

De esta manera, la integral se transforma en otra fácilmente calculable, pues el nuevo integrando es un polinomio de grado n. De esta manera, se ha obtenido la fórmula de Newton-Cotes:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\int_0^n \left(y_0 + t\,\Delta y_0 + \binom{t}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \binom{t}{n}\Delta^n y_0\right) dt$$

Casos particulares importantes

1. $\boxed{n = 1} \Rightarrow x_0 = a,\ x_1 = b,\ h = b - a = x_1 - x_0$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\int_0^1 (y_0 + t\,\Delta y_0)\,dt = h\left| y_0 t + \frac{t^2}{2}\Delta y_0 \right|_0^1 =$$

$$= h\left(y_0 + \frac{\Delta y_0}{2}\right) = h\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2}\right) = (b-a)\cdot\frac{y_0 + y_1}{2}$$

Esta fórmula se denomina *trapezoidal*, pues representa el área del trapecio rayado en la figura 12.34.

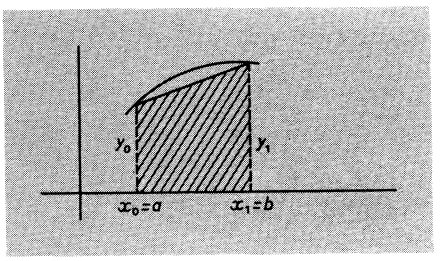


Fig. 12.34

2. $\boxed{n = 2} \Rightarrow x_0 = a,\ x_2 = b,\ h = \dfrac{b-a}{2}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\int_0^2 \left(y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t^2 - t}{2}\Delta^2 y_0\right) dt =$$

$$= h\left| y_0 t + \frac{t^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2}\right|_0^2 =$$

$$= h\left(2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) = h\left(2y_1 + \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{3}\right) =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{b-a}{2}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

La expresión conseguida es la llamada *fórmula de Simpson.*

La fórmula de Simpson es una especie de fórmula de prismatoide plano e indica (Fig. 12.35) que el área de un trapecio, uno de cuyos lados no paralelos es un arco de curva, puede evaluarse como «un sexto de la altura por la suma de las bases más cuatro veces la base media»; o sea:

$$S \approx \frac{H}{6}(b + b' + 4b'')$$

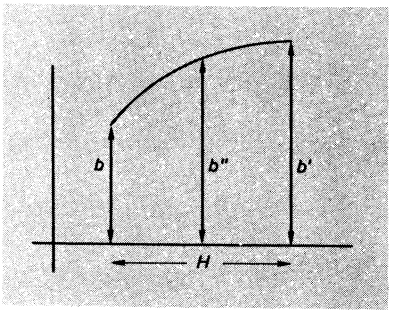


Fig. 12.35

La fórmula anterior es exacta cuando el lado curvo es una parábola de segundo o tercer grado.

Ejercicio

Demuéstrese la fórmula anterior, suponiendo $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con los ejes en la posición que se indica en la figura 12.36

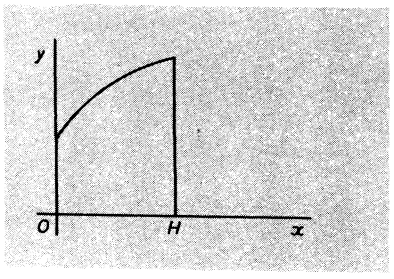


Fig. 12.36

Cuando se calcula numéricamente una integral es del máximo interés conocer una estimación del error cometido. No existen acotaciones buenas de este error. Aquí, nos limitaremos a expresar, sin demostración, los valores del error en el caso de los métodos trapezoidal y de Simpson:

Error del método trapezoidal

$$E = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$$
$$\xi \in (a, b)$$

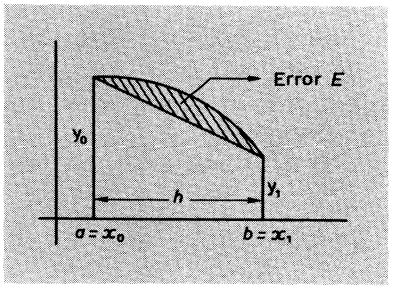


Fig. 12.37

Error del método de Simpson

$$E = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) =$$
$$= -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi)$$
$$\xi \in (a, b)$$

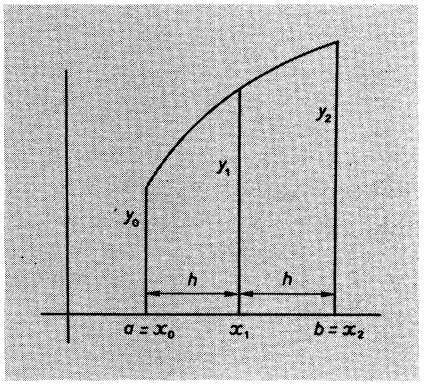


Fig. 12.38

Las demostraciones de las fórmulas anteriores de error son farragosas y no se consideran procedentes sus desarrollos.

Ejercicio

Aplíquese el método trapezoidal y de Simpson al intervalo (0, 6) y a la función $y = e^{-x^2}$.

12.15. OTROS METODOS DE CALCULO. METODO DE GAUSS

En el método de Newton-Cotes se toman los puntos de división de (a, b) equidistantes, condición necesaria para aplicar la fórmula de interpolación de Newton.

Si el polinomio de interpolación de $f(x)$ fuese

$$\sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

donde $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, son cualesquiera, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} y_i \int_a^b L_i(x)\,dx$$

Las $n + 1$ integrales $\int_a^b L_i(x)\,dx$, $i = 0, 1, \ldots n$ son fácilmente calculables, por ser funciones racionales, y se tiene el problema resuelto.

El método de Gauss consiste en seleccionar los puntos $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n$, de manera que el error cometido en la aproximación de la integral sea mínimo.

Los puntos $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n$, son las raíces de un polinomio (llamado *de Legendre*) que viene dado por la expresión

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{d\,x^n}$$

Fijados los puntos x_i, se obtienen los valores y_i que la función toma en esos pùntos; y la integral viene dada por

$$\sum_{i=0}^{n} A_i y_i$$

donde ocurre una cosa importante, y es que los A_i son unos coeficientes independientes de la función a integrar, que se fijan de una vez para siempre. Estos coeficientes A_i se llaman *números de Christoffel.*

Los coeficientes A_i y los números x_i dependen del número de puntos de división y están tabulados análogamente a la pequeña tabla que sigue, suponiendo el intervalo $(-1, 1)$.

n	x_i	A_i
2	$-x_1 = x_2 = 0{,}577$	1
3	$-x_1 = x_3 = 0{,}775$	0,555
	$x_2 = 0$	0,888
4	$-x_1 = x_4 = 0{,}861$	0,348
	$-x_2 = x_3 = 0{,}340$	0,652

Por ejemplo, para tres divisiones x_1, x_2, x_3, sería:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) =$$

$$= 0{,}555\, f(-0{,}775) + 0{,}888\, f(0) + 0{,}555\, f(0{,}775)$$

Ejemplo

Se quiere conocer la temperatura media de un día, efectuando sólo tres medidas. ¿A qué hora deberán tomarse las medidas?

El día tiene veinticuatro horas, luego se toman como unidad doce horas y se establece el origen de tiempos al mediodía.

La temperatura media será:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(t)\,dt$$

o bien, aplicando la fórmula de Gauss para tres divisiones,

$$\frac{0{,}555\,f(-0{,}775) + 0{,}888\,f(0) + 0{,}555\,f(0{,}775)}{2}$$

Entonces es suficiente medir la temperatura en los instantes $-0{,}775$, 0 y $+0{,}775$ y sustituir en la expresión anterior:

$$12 \times 0{,}775 = 9{,}3 \text{ h} = 9 \text{ h } 18 \text{ m}.$$

Las horas de medida de la temperatura serán:

$$12 + 0 = 12 \text{ h}$$
$$12 + 9{,}3 = 21 \text{ h } 18 \text{ m}$$
$$12 - 9{,}3 = 2 \text{ h } 42 \text{ m}.$$

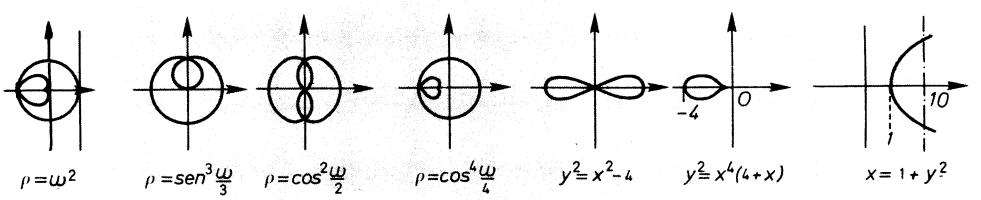
Existen otros métodos, llamados de Gauss-Hermite, de Tchebichef, etc., cuyo fundamento es el mismo que el de Gauss. Para estos métodos existen tablas que dan x_i y A_i, y su aplicación es la misma que la que se ha desarrollado.

12.16. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. Hállese la longitud de las curvas que se indican:

$\rho = \omega^2$ entre $\omega = 0$ y $\omega = 2\sqrt{3}$; $\quad \rho = \text{sen}^3\frac{\omega}{3}$; $\quad \rho = \cos^2\frac{\omega}{2}$; $\quad \rho = \cos^4\frac{\omega}{4}$

2. Hállense las áreas encerradas por las curvas que se indican, sobre las gráficas que se proporcionan.



$\rho = \omega^2$ $\quad \rho = sen^3\frac{\omega}{3}$ $\quad \rho = \cos^2\frac{\omega}{2}$ $\quad \rho = \cos^4\frac{\omega}{4}$ $\quad y^2 = x^2 - 4$ $\quad y^2 = x^4(4 + x)$ $\quad x = 1 + y^2$

Fig. 12.39

3. Determínense las longitudes de las curvas que se establecen, entre los límites que se fijan

$$\left.\begin{matrix} x = t^2 \\ y = t^3 \end{matrix}\right\} \text{ desde } t = 0 \text{ a } t = 4; \qquad \left.\begin{matrix} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sen} t \end{matrix}\right\} \text{ desde } t = 0 \text{ a } t = 4$$

4. *a*) Hállese el área encerrada por la curva $\rho = a \cos 3\omega$, en el espacio rayado.
b) Encuéntrese el área determinada por $y = \operatorname{tg} \cdot x$ entre 0 y $\pi/4$.
c) Calcúlese el área determinada por $y = Lx$ entre 1 y 5.

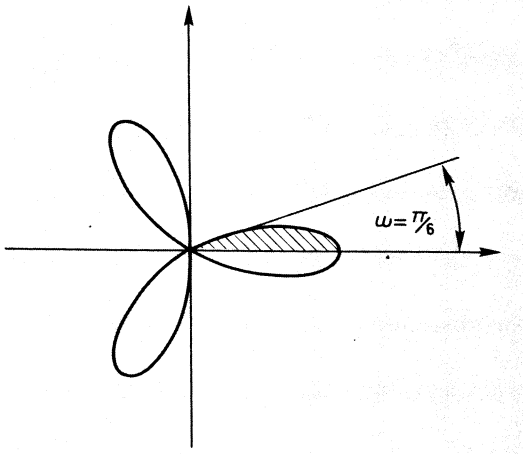


Fig. 12.40

5. Area de $y = \operatorname{sen} x$ entre 0 y π.

Area de $y = \dfrac{2x}{(x-1)(x+2)}$ entre 3 y 5.

Area de $\left.\begin{matrix} x = t^2 \\ y = 2t^3 - 3 \end{matrix}\right\}$, desde $t = 2$ a $t = 5$.

6. Area de $\left.\begin{matrix} x = R\cos t \\ y = R \operatorname{sen} t \end{matrix}\right\}$, desde $t = 0$ a $t = 2\pi$.

7. Hállese el área rayada de la curva trocoide $\left.\begin{matrix} x = R\varphi + h \operatorname{sen} \varphi \\ y = R + h\cos\varphi \end{matrix}\right\}$.

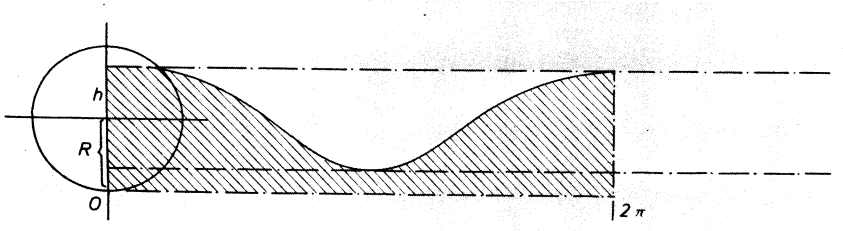


Fig. 12.41

8. Determínense las áreas rayadas que se dibujan:

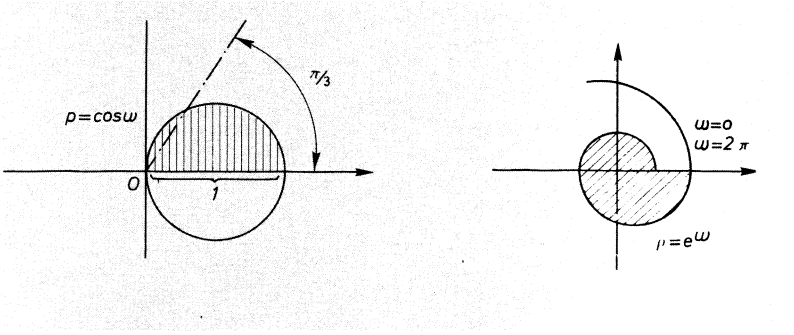


Fig. 12.42

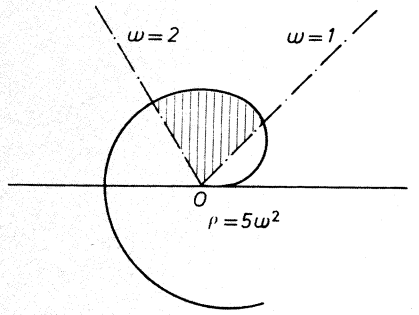


Fig. 12.43

9. Hállese la longitud de las siguientes curvas:

$$y = 2\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{2} \text{ desde } x = 0 \quad \text{a} \quad x = 3; \qquad y = 3x^{3/2} \text{ desde } x = 1 \quad \text{a} \quad x = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = R(\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \\ y = R(1 + \cos\varphi) \end{array}\right\}, \text{ desde } \varphi = 0 \quad \text{a} \quad \varphi = \pi$$

10. Determínese la longitud de las curvas que se indican:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = R\operatorname{sen} t \end{array}\right\}, \text{ desde } t = 0 \quad \text{a} \quad t = \pi$$

$$\rho = \omega^2, \text{ desde } \omega = 0 \quad \text{a} \quad \omega = 2$$

$$\rho = 2R\cos\omega, \text{ desde } \omega = 0 \quad \text{a} \quad \omega = \pi/2$$

11. Se desea conocer la media de precipitaciones en La Coruña, durante el mes de abril, efectuando sólo cuatro mediciones. ¿Qué días deberá ser leído el pluviómetro?

12. Se desea saber la media del nivel de un embalse durante el mes de junio, efectuando tres lecturas. ¿En qué días deberían realizarse?

13. Aplíquese la fórmula de Simpson para calcular $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$, tomando cinco puntos.

14. Aplíquese la fórmula del trapecio al cálculo de $\int_2^3 Lx\, dx$.

13

Sucesos aleatorios

13.1. INTRODUCCION

Durante mucho tiempo fue doctrina común que el objeto de la ciencia, el «hecho científico» era todo aquello que podía encuadrarse dentro de una fenomenología determinista; es decir, sólo se podía aplicar el método científico a aquellos experimentos cuyos resultados eran los mismos, si las condiciones de ejecución eran iguales.

Superado este concepto, hoy el objeto de la ciencia es tanto los sucesos de la fenomenología determinista, como los hechos, no predecibles, de una fenomenología aleatoria, estocástica o de azar. Más aún: puede que esta última parcela, de extraordinaria importancia, no sea más que el salto enorme de haber conseguido descubrir y contemplar con «lupa más fina» lo que de aleatorio hay en los microhechos de la macrofenomenología determinista. Quedan muy lejos los conceptos del «electrón-bola», por ejemplo, y el del encorsetamiento copernicano de las estructuras electrónicas; hoy, la ley del azar, las funciones de probabilidad, el postulado de incertidumbre, son otros tantos hitos científicos de una ciencia, de una Matemática de la aleatoriedad.

Si se realiza la *experiencia* de añadir sodio sobre agua, tantas cuantas veces se haga la *prueba*, se producirá el mismo *suceso*: una violenta reacción genera gas hidrógeno y compone sosa cáustica. Se trata de un fenómeno determinista: el resultado de la experiencia es siempre el mismo suceso, y, por tanto, predecible.

Es bien conocido que la pareja 23 de cromosomas de la especie humana, en el hombre está formada por los distintos (X, Y) y en la mujer lo constituyen los iguales (X, X). Genéticamente, el sexo del hijo viene determinado porque el acoplamiento cromosómico produzca pares (X, X) o (X, Y). Resulta entonces que la prueba o experiencia de la fecundación natural produce un suceso cuyo resultado no es

predecible, por lo que se refiere al sexo del hijo; el azar interviene en el acoplamiento cromosómico, y todavía les es dado a los hombres la gracia de la incertidumbre, cuando esperan sus hijos. He aquí un fenómeno aleatorio.

13.2. EXPERIENCIA O PRUEBA. SUCESOS ELEMENTALES. ESPACIO MUESTRAL

Para describir —que no definir— el concepto *suceso*, tal vez sea bueno contemplar algunos sinónimos suyos: hecho, sucedido ... Se advierte que se trata de sustantivos derivados claramente de una forma verbal pasiva, o sea, pasada. Todo ello sugiere que un suceso, para que exista, ha de venir precedido de una determinada ejecución (real o fingida). En efecto: un *suceso* se presenta siempre como resultado de una *experiencia* o *prueba*.

Resulta así que, fijada una determinada experiencia, asociado a ella, aparece un conjunto de sucesos posibles, excluyentes entre sí, cada uno de los cuales recibe el nombre de *suceso elemental*; y el conjunto de sucesos elementales se denomina *espacio muestral*.

Ejemplo 1

Sea la experiencia aleatoria «Tirar un dado sobre la mesa y leer su cara superior en reposo».

Los sucesos elementales que la experiencia puede producir son seis: que salga y se lea el 1, el 2, el 3, el 4, el 5, el 6, de modo que el espacio muestral es el conjunto

$$H = \{h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ h_5,\ h_6\}$$

13.3. SUCESOS COMPUESTOS. SUCESO SEGURO

Se denomina suceso compuesto (suceso, en general) a todo subconjunto $A \subset H$, del espacio muestral; y recibe el nombre de *suceso seguro* al suceso representado por el espacio muestral, completo.

En esta línea de establecimientos, se puede definir ahora el concepto de suceso elemental como cualquier subconjunto unitario del espacio muestral.

Ejemplo 2

Sobre la misma experiencia del ejemplo anterior, analicemos en qué consiste el suceso A = «que salga y se lea un número múltiplo de 2».

Es claro que este suceso compuesto se verifica si sale y se lee 2, 4 ó 6, de modo que

$$A = \{h_2,\ h_4,\ h_6\}$$

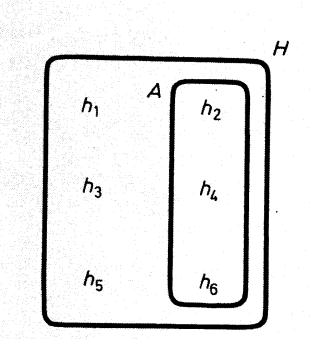


Fig. 13.1

Y ¿cuál es el suceso descrito de este modo: «que salga y se lea un número menor que 7»?

Evidentemente, se trata del suceso seguro, representado por el espacio muestral.

13.4. CONJUNTO-POTENCIA DE UN ESPACIO MUESTRAL, *H*

Se establece un espacio muestral $H = \{h_1, h_2, h_3\}$, de tres sucesos elementales, con el fin de no hacer farragosa la exposición.

El conjunto-potencia $P(H)$ es

$$P(H) = \{\phi, \{h_1\}, \{h_2\}, \{h_3\}, \{h_1, h_2\}, \{h_1, h_3\}, \{h_2, h_3\}, H\}$$

Sus $2^3 = 8$ elementos-conjunto son todos los sucesos a considerar (simples o compuestos), a partir de la experiencia generadora.

¿Qué representa el ϕ?, ¿qué suceso es? Es el *suceso imposible*, que ha de considerarse, para salvar la consistencia del álgebra de sucesos: se trata del suceso «pensado» que no se produce en la categoría de pruebas, generadora del sistema.

Un poco más adelante, al tratar la complementación, el suceso imposible nacerá desde otro punto de vista.

Ejemplo-Ejercicio 3

Sea la categoría de pruebas del ejemplo 1. Una forma de describir el suceso imposible sería

$$\phi = \text{«que salga y se lea 9»}.$$

Otro modo de describir el mismo suceso podría ser

$$\phi = \text{«que salga y se lea un múltiplo de 11»}.$$

¿Cuál es el suceso $\{h_1, h_3\}$?
¿Qué subconjunto describe el suceso «sacar múltiplo de 3»?
¿Y cuál el «obtener un número menor que 4»?

13.5. ORDEN E IGUALDAD EN EL CONJUNTO $P(H)$

13.5.1. Inclusión de sucesos

Sean A y B dos sucesos pertenecientes a la misma categoría de pruebas; de modo que, siendo H el espacio muestral, A y B son subconjuntos de H y, por tanto, elementos de $P(H)$:

$$\begin{array}{ll} A \subset H & B \subset H \\ A \in P(H) & B \in P(H) \end{array}$$

Se dice que A está incluido en B —denotado $A \subset B$— si el hecho de verificarse A implica que se realiza B.

Ejemplo 4

Sea la categoría de pruebas «extraer y leer una carta de una baraja de 52 naipes». Digamos que el suceso K es «conseguir un rey» y el F, «obtener una figura».

Es claro que $K \subset F$, puesto que, siempre que se consiga un rey, se ha obtenido una figura.

La inclusión de sucesos es una relación de orden $P(H)$, puesto que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En efecto, los planteamientos que siguen son inmediatos.

Reflexiva	$A \subset A,\ \forall A \in P(H)$
Antisimétrica	$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow A \equiv B$
Transitiva	$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

El orden $(P(H), \subset)$ es un orden amplio parcial. Amplio, por ser reflexivo; parcial, pues dados dos cualesquiera sucesos A y B de $P(H)$, no siempre se puede establecer que $A \subset B$ o que $B \subset A$.

Ejemplo 5

Sea la categoría de pruebas del ejemplo anterior. Los sucesos A = «conseguir corazones» y B = «obtener un as» son dos sucesos que no se incluyen: ni el hecho de haber conseguido un as implica haber obtenido corazones, ni, si se ha verificado «corazones», se puede asegurar que se haya obtenido un as.

Dos sucesos A y B de los que no se puede escribir que $A \subset B$ o que $B \subset A$, se dice que son *sucesos no comparables*.

13.5.2. Igualdad de sucesos

Se establecen dos sucesos A y B de la misma categoría de pruebas H. Si sucede que A está incluido en B y B lo está en A, entonces A y B son dos sucesos iguales. O sea,

$$\left.\begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset A \end{array}\right\} \Leftrightarrow A \equiv B$$

Ejemplo 6

En una urna hay bolas blancas y otras coloreadas de azul, rojo o verde. En la categoría de pruebas «extraer una bola y constatar su color», se consideran los sucesos A = «extraer bola coloreada» y el suceso B = «conseguir una bola azul, roja o verde».

Siempre que se verifique A lo hace B; y siempre que suceda B, se ha conseguido bola coloreada, o sea, se ha llevado a cabo A. Quiere decirse que el suceso A está incluido en el B y que el B está incluido en el A. En fin, se trata del mismo suceso.

La igualdad de sucesos es una relación de equivalencia en $P(H)$, puesto que es reflexiva, simétrica y transitiva. La justificación es trivial.

Reflexiva	$A \equiv A, \ \forall A \in P(H)$
Simétrica	$A \equiv B \Leftrightarrow B \equiv A$
Transitiva	$\left.\begin{array}{l} A \equiv B \\ B \equiv C \end{array}\right\} \Rightarrow A \equiv C$

13.6. OPERACIONES CON SUCESOS

13.6.1. Complementación. Sucesos contrarios. Suceso imposible

Considérese la categoría de pruebas que da lugar al espacio muestral H, formado por n sucesos elementales.

$$H = \{h_1, \ h_2, \ \ldots, \ h_n\}$$

Sea un suceso $A \subset H$. Se denomina *suceso contrario* del A —y se denota $\bar{A}$— al suceso que se verifica si, y sólo si, no lo hace A.

Entendamos que el suceso A está formado por los j elementales

$$A = \{h_1, \ h_2, \ \ldots, \ h_j\}.$$

Según la definición, el suceso contrario $\bar{A}$ habrá de estar constituido por los n-j sucesos elementales que completan el espacio muestral H, de modo que

$$\bar{A} = \{h_{j+1}, \ \ldots, \ h_n\}$$

Ejemplo 7

El suceso A es «conseguir un número mayor o igual que 4, al tirar un dado sobre una mesa». Será, pues,

$$A = \{h_4,\ h_5,\ h_6\}.$$

El suceso contrario $\bar{A}$ se verificará si no lo hace A, por tanto, el subconjunto representativo suyo es

$$\bar{A} = \{h_1,\ h_2,\ h_3\}.$$

Dos descripciones verbales de $\bar{A}$ pueden ser:

«No conseguir un número mayor o igual que 4»;
«Obtener un número menor que 4».

Se denomina *complementación* de sucesos la operación unitaria que produce como resultado el contrario del suceso operado.

Suceso imposible, denotado ϕ, es el contrario del suceso seguro, H.

$$\bar{H} = \phi$$

Claro es que el suceso contrario del imposible es el suceso seguro.

13.6.2. Unión

Sean los sucesos $A \subset H$ y $B \subset H$ dos sucesos de la misma categoría de pruebas. Se dice que el suceso C es su suceso-reunión, y se escribe $A \cup B = C$, si y sólo si se verifica C, cuando se verifica al menos uno de los reunidos.

Los sucesos elementales que forman el conjunto C son todos los que pertenecen a A y/o a B.

$$A = \{h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_j\} \qquad B = \{h_k,\ h_{k+1},\ \ldots,\ h_m\}$$
$$A \cup B = C = \{h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_j,\ h_k,\ h_{k+1},\ \ldots,\ h_m\}$$

Ejemplo 8

De la categoría de pruebas del ejemplo 1, se establecen los sucesos A = «conseguir un número múltiplo de 2» y B = «obtener un número mayor que dos y menor que 5».

Usamos un diagrama de Venn que nos permite «ver» la reunión, $A \cup B$.

$$A = \{h_2,\ h_4,\ h_6\} \quad ; \quad B = \{h_3,\ h_4\}$$
$$C = A \cup B = \{h_2,\ h_3,\ h_4,\ h_6\}$$

Si sale 2, se verifica A; basta para que se verifique $A \cup B$; si aparece un 3, sucede B; basta para que se verifique $A \cup B$; si se produce un 4 se verifican A y B; sucede $A \cup B$; si resulta un 6, se verifica A; suficiente para que se realice $A \cup B$.

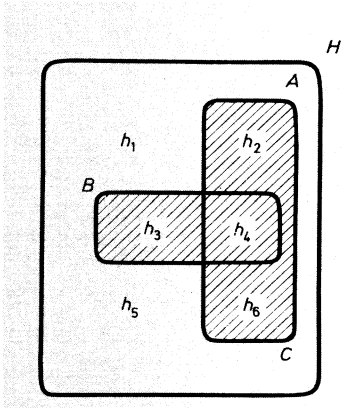


Fig. 13.2

13.6.3. Intersección. Sucesos incompatibles

Sean los sucesos $A \subset H$ y $B \subset H$ dos sucesos de la misma categoría de pruebas. Se establece que el suceso C es su suceso-intersección —y se escribe $A \cap B = C$— si y solamente si se verifica C, cuando se verifican ambos sucesos intersecados.

Los sucesos elementales que forman el conjunto-intersección C son los comunes a A y a B.

$$A = \{h_1, \ldots, h_{j-1}, h_j\} \qquad B = \{h_{j-1}, h_j, h_k, \ldots, h_m\}$$
$$A \cap B = C = \{h_{j-1}, h_j\}$$

Ejemplo 9

De una baraja de 52 cartas se extrae, al azar, un naipe. Se consideran los sucesos A = «conseguir un as» y B = «obtener corazones». He aquí su constitución en sucesos elementales:

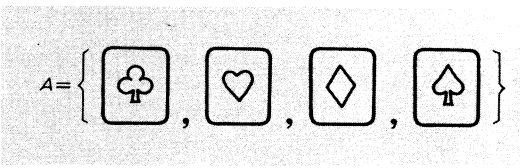


Fig. 13.3 $B = \{$*conseguir una de las 13 cartas de corazones*$\}$

La intersección, $A \cap B$, resulta ser unitaria en este caso:

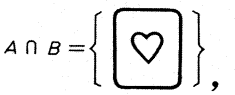
$A \cap B =$ 

Fig. 13.4

pues el único suceso elemental, común a los sucesos intersecados, es «obtener el as de corazones».

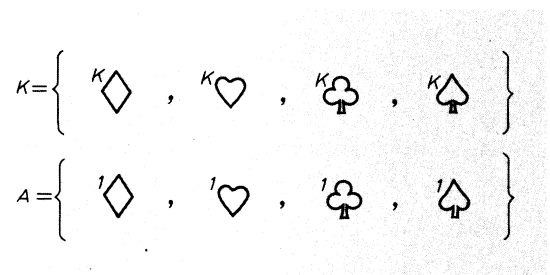
Sucesos incompatibles. Dos sucesos A y B de la misma categoría de pruebas son incompatibles si su intersección es el suceso imposible. O sea,

$$\left.\begin{array}{l} A \subset H \text{ y } B \subset H \text{ son} \\ \text{incompatibles} \end{array}\right\} \Leftrightarrow A \cap B = \phi$$

Consecuentemente, los sucesos elementales que constituyen dos sucesos incompatibles son distintos. Por ello, el que se verifique el suceso A implica que no puede suceder el B; pero adviértase que el hecho de no haberse presentado A no exige que se realice B. Puede suceder que en una prueba de su categoría no se verifique ni el uno ni el otro.

Ejemplo 10

De la categoría de pruebas del ejemplo precedente. Se consideran los sucesos K = «obtener un rey» y A = «obtener un as». He aquí dos sucesos incompatibles, constituidos por diferentes sucesos elementales



$K \cap A = \phi$ Fig. 13.5

Si se ha verificado uno de los cuatro sucesos elementales de K, se ha verificado K, y ello prohíbe que se realice A; pero bien pudiera ser que no se obtenga un rey, lo cual no quiere decir que se haya obtenido necesariamente un as.

13.7. SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS

Sean $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sucesos de un espacio muestral H. Si se verifica que

1.º) $\bigcup_n H_i = H$

2.º) $H_i \cap H_j = \phi \quad , \quad \forall i \neq j,$

se dice que los n sucesos planteados forman un sistema completo de sucesos.

Tal vez se haya caído en la cuenta de que lo que se ha establecido como un sistema completo de sucesos no es más que una partición del muestral H, ya que las condiciones son las que definen la partición: un recubrimiento y la incompatibilidad (disjunción) binaria.

El más «natural» sistema completo de sucesos es el constituido por los sucesos elementales del espacio muestral

$$h_1 \cup h_2 \cup \cdots \cup h_n = H$$
$$h_i \cap h_j = \phi \quad , \quad \forall i \neq j$$

Otro sistema completo de sucesos lo constituyen siempre un suceso y su contrario, ya que

Recubrimiento: $A \cup \bar{A} = H$
Incompatibilidad: $A \cap \bar{A} = \phi$

Con estos nuevos datos, se puede establecer menos fenomenológicamente de como se hizo en 3.361, el concepto de sucesos contrarios:

> Dos sucesos son contrarios, si, siendo incompatibles, recubren el espacio muestral.

13.8. LEYES DEL ALGEBRA DE SUCESOS. EL ALGEBRA DE BOOLE DE LOS SUCESOS ESTOCASTICOS

Las siete leyes fundamentales del álgebra de sucesos son:

L_1) *Absorción* $A \cup (A \cap B) = A \quad ; \quad A \cap (A \cup B) = A$

L_2) *Idempotencia* $A \cup A = A \quad ; \quad A \cap A = A$

L_3) *Asociatividad* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad ;$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

L_4) *Conmutatividad* $A \cup B = B \cup A \quad ; \quad A \cap B = B \cap A$

L_5) *Complementariedad* $A \cup \bar{A} = H \quad ; \quad A \cap \bar{A} = \phi$

L_6) *Distributividad* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad ;$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

L_7) *Identidad* $A \cup \phi = A \quad ; \quad A \cap H = A$

Tomando como axiomas las seis primeras de esas siete leyes se construye la estructura de $[P(H), \cup, \cap]$, que es:

L_1) Absorción * y $\perp$	*Retículo*	*Retículo complementario*	*Algebra de Boole*	
L_2) Idempotencia * y $\perp$				
L_3) Asociatividad * y $\perp$				
L_4) Conmutatividad * y $\perp$				
L_5) Complementariedad				
L_6) Distributividad * y $\perp$				

La ley L_7), con esta axiomática, es un teorema que habrá de demostrarse en base a las seis primeras.

Otro modo de analizar esta estructura de álgebra de Boole de los sucesos, es el que desarrolla HUNTINGTON, que escoge como axiomas las leyes L_4, L_5, L_6 y L_7, considerando teoremas las L_1, L_2 y L_3.

13.9. PRINCIPIO DE DUALIDAD

En la recién establecida álgebra de Boole se habrá observado que la axiomática se ha construido a dos columnas, referibles a cada una de las operaciones binarias; y que bastaría sustituir en los enunciados de la primera columna el signo * por el signo $\perp$, para obtener los de la segunda.

Aparte de lo dicho, considérense los elementos extremos del orden Ω, que se refieren al universal y al vacío. Pues bien: se denomina enunciado dual de otro al que resulta de intercambiar los signos *, $\perp$ y los elementos extremos ϕ y $\cup$.

El principio de dualidad dicta: «En toda estructura en que coexistan dos axiomas duales, sucede que todo teorema deducido de uno de ellos implica su teorema dual.»

Usaremos continuamente de este principio en los desarrollos algebraicos que siguen.

13.10. TEOREMAS

L_1) *Absorción*

$$A \cup (A \cap B) = A \quad ; \quad A \cap (A \cup B) = A$$

Se justifica la primera. Análoga demostración establece la segunda.

$$[\forall x \in [A \cup (A \cap B)] \Rightarrow [(x \in A) \vee (x \in A \wedge x \in B)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in A \quad ; \quad \underline{A \cup (A \cap B) \subset A}$$

$$[\forall x \in A] \Rightarrow [(x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B)] \Rightarrow [(x \in A) \vee (x \in A \wedge x \in B)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in A \cup (A \cap B); \quad \underline{A \subset A \cup (A \cap B)}$$

L_2) *Idempotencia*

$$A \cup A = A \quad ; \quad A \cap A = A$$

$$[\forall x \in A \Rightarrow x \in (A \cup A)] \Rightarrow A \subset (A \cup A);$$
$$[\forall x \in (A \cup A) \Rightarrow x \in A] \Rightarrow (A \cup A) \subset A.$$

L_3) *Asociatividad*

$$A \cup (B \cup C) \equiv (A \cup B) \cup C$$

Basta para justificarla, probar la inclusión recíproca, como se acaba de hacer en T_2.

$$[x \in A \cup (B \cup C)] \Rightarrow [(x \in A) \vee x \in (B \cup C)] \Rightarrow [(x \in A) \vee (x \in B \vee x \in C)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C] \Rightarrow [x \in (A \cup B) \vee x \in C] \Rightarrow [x \in (A \cup B) \cup C]$$
$$A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C \qquad [1]$$

y la inclusión recíproca,

$$[x \in (A \cup B) \cup C] \Rightarrow [x \in (A \cup B) \vee x \in C] \Rightarrow [(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)] \Rightarrow [x \in A \vee x \in (B \cup C)] \Rightarrow [x \in (A \cup (B \cup C))]$$
$$(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C) \qquad [2]$$

Las inclusiones [1] y [2] prueban T_3.

L_7) *Identidad*

$$A \cup \phi = A \quad ; \quad A \cap U = A$$

Es deducible como teorema, a partir de los seis postulados de la axiomática reticular,

En efecto: $A \cup \phi = A \cup (A \cap \bar{A})$ por L_5
$= A$ por L_1

De igual modo, la proposición dual

$$A \cap U = A \cap (A \cup \bar{A}) \text{ por } L_5$$
$$= A \text{ por } L_1$$

L_8) *Involución*

$$\bar{\bar{A}} = A$$

Sea un suceso $B \in P(H)$.
Por complementariedad (A_5): $B \cup \bar{B} = H \quad ; \quad B \cap \bar{B} = \phi$ [1]

por conmutatividad (A_4): $\bar{B} \cup B = H \quad ; \quad \bar{B} \cap B = \emptyset$ [2]

Supóngase que $B \equiv \bar{A}$; entonces, en [2],

$$\bar{\bar{A}} \cup \bar{A} = H \quad ; \quad \bar{\bar{A}} \cap \bar{A} = \phi \qquad [3]$$

Como el axioma de complementariedad (A_5) ha de cumplirse, sucede que

$$A \cup \bar{A} = H \quad ; \quad A \cap \bar{A} = \phi \qquad [4]$$

y si el suceso contrario es único*, al comparar las expresiones [3] y [4], resulta necesariamente que

$$\bar{\bar{A}} = A$$

Consecuencia inmediata del teorema es el corolario

t_8) $$(\bar{\phi} = H) \wedge (\bar{H} = \phi)$$

T_9) *Ley de De Morgan* $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$[\forall h \in \overline{(A \cup B)}] \Rightarrow h \notin (A \cup B) \Rightarrow [(h \notin A) \wedge (h \notin B)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(h \in \bar{A}) \wedge (h \in \bar{B})] \Rightarrow h \in (\bar{A} \cap \bar{B}) \quad ;$$
$$\overline{(A \cup B)} \subset \bar{A} \cap \bar{B} \qquad [5]$$

recíprocamente:

$$[\forall h \in (\bar{A} \cap \bar{B})] \Rightarrow [(h \in \bar{A}) \wedge (h \in \bar{B})] \Rightarrow [(h \notin A) \wedge (h \notin B)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [h \notin (A \cup B)] \Rightarrow h \in \overline{(A \cup B)} \quad ;$$
$$\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{(A \cup B)} \qquad [6]$$

De [5] y de [6] se sigue la primera ley de De Morgan. Debe intentarse como ejercicio la justificación de la segunda.

T_{10}) *Simplificación*:

$$A \subset A \cup B \quad ; \quad B \subset A \cup B$$

En efecto:

$$[\forall x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)] \Rightarrow A \subset A \cup B$$
$$[\forall x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B)] \Rightarrow B \subset A \cup B$$

T_{14}) *Implicación-reunión*:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow [(A' \cup B) \equiv U]$$
$$(A \subset B) \Leftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B] \Leftrightarrow [\forall x \notin A' \Rightarrow x \in B] \Rightarrow (A' \cup B) \equiv U$$
$$[(A' \cup B) \equiv U] \Rightarrow [\forall x \notin A' \Rightarrow x \in B] \Leftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B] \Rightarrow A \subset B$$

T_{17}) *Expansión*:

$$(A \cup B \equiv B) \Leftrightarrow A \subset B$$
$$[(A \cup B) \equiv B] \Rightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$$
$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow (A \cup B \equiv B)$$

T_{10}) En $[P(H), \bar{}, \cup, \cap]$ la relación de $\subset$ es de orden.

La relación se establece así: $A \subset B \Leftrightarrow (A \cap B = A) \wedge (A \cup B = B)$. La sencilla justificación de la reflexividad, antisimetría y transitividad de la relación escrita se propone como ejercicio.

T_{11}) El orden $[P(H), \subset]$ tiene extremos absolutos, H y ϕ.
$\forall A \in P(H)$,

$$\begin{aligned} A \cap \phi &= \phi \cup (A \cap \phi), && \text{según } A_7 \text{ y } A_4; \\ &= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \phi), && \text{según } A_5; \\ &= A \cap (\bar{A} \cup \phi), && \text{según } A_6; \\ &= A \cap \bar{A}, && \text{en virtud de } A_7; \\ &= \phi, && \text{en razón de } A_5. \end{aligned}$$

De modo que $\phi = A \cap \phi$

$$\begin{aligned} \phi &= \phi \cap A, && \text{según } A_4 \\ &\Updownarrow \\ \phi &\subset A \end{aligned}$$

Por otra parte. $A = A \cap H \Leftrightarrow A \subset H$

T_{12}) *Ley de Dedekind*: $A \subset B \Rightarrow A \cup (C \cap B) \equiv (A \cup C) \cap B$

$$A \cup (C \cap B) \equiv (A \cup C) \cap (A \cup B), \quad \text{según } A_6 \qquad [7]$$

$$A \subset B \Rightarrow (A \cup B) = B \qquad [8]$$

Sustituyendo [8] en [7],

$$A \cup (C \cap B) = (A \cup C) \cap B$$

13.11. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. Ejercicios de simbolización y lectura.

Sea la experiencia que consiste en volver una ficha de las veintiocho de un dominó, que se encuentran «tapadas» sobre la mesa, y leer el número de puntos que resulta.

a) Establézcase el espacio muestral H, con sus trece sucesos elementales.
b) ¿De cuántos sucesos consta el álgebra de $P(H)$?
c) Denotando h_i el suceso que consiste en haber destapado y leído una ficha con i puntos, simbolícense o descríbanse los siguientes sucesos:

h_{13}; h_0; $\{h_0, h_1, h_2, \ldots, h_6\}$; $A = h_5 \cup h_{10}$
B = «vuélvase y léase una ficha, al menos, de diez puntos»
C = «consígase ficha, múltiplo de 6»
$D = \overline{h_6 \cup h_{12}}$
$E = h_4 \cap h_3$

2. En la misma categoría de pruebas del ejercicio anterior, descríbanse los siguientes sucesos:

$$\bar{h}_4 \cup \bar{h}_6 \quad ; \quad \bar{h}_4 \cap \bar{h}_6 \quad ; \quad \overline{h_2 \cup \bar{h}_4}$$

3. Usando las leyes del álgebra de sucesos, simplifíquese, justificando cada paso, las siguientes expresiones

a) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$
b) $(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (A \cup B)$

4. Siendo $A \in P(H)$, dibújese el diagrama de orden de los siguientes sucesos:

$$\bar{H} \cap \bar{A} \quad ; \quad \bar{H} \quad ; \quad \bar{A} \quad ; \quad \bar{H} \cup \bar{A}$$

5. El departamento de verificación de una fábrica electrónica, de cada caja de 100 disyuntores, toma, al azar, tres para verificarlos en el laboratorio, y de este modo, evaluar la calidad de producción.

a) Establézcase el espacio muestral de todas las posibles tomas.
b) Tabúlese, mediante sus elementales, el suceso que consiste en haber conseguido siempre un tercer disyuntor defectuoso.

6. Se lanzan dos dados homogéneos al aire. Sea el suceso A = «obtener un número de puntos, múltiplo de 2» y el suceso B = «obtener, al menos, un 4». ¿En qué consisten los siguientes sucesos?:

$$A \cup B \quad ; \quad A \cap B \quad ; \quad \bar{A} \cup (A \cap \bar{B})$$

7. Se dispone de una urna con cuatro bolas, marcadas con los números 0, 1, 2, 3. Sea la categoría de pruebas generada por la experiencia «Extraer una bola, anotar su número, volverla a introducir y sacar una segunda bola, al azar, apuntando el número conseguido».

Establézcase el espacio muestral en sus dieciséis sucesos elementales.
Sugerencia: realícese un diagrama de árbol.

8. Consúltese el capítulo 1.2, y por analogía con el álgebra de conjuntos, establézcase la diferencia de sucesos.

9. De igual modo que en 8, defínase la diferencia simétrica de sucesos. Acompáñese el establecimiento con un diagrama de Venn.

10. Demuéstrese que en el álgebra de sucesos, el contrario de todo suceso es único.

14

Frecuencia y probabilidad

14.1. INTRODUCCION

Establecido en el capítulo precedente el conjunto de los sucesos aleatorios, estructurado en álgebra de Boole, el presente capítulo se dedica a estudiar la cuantificación de su verificación dentro del espacio muestral generado por una determinada categoría de pruebas.

El método a seguir es el que siempre se utiliza en Matemáticas y que, formando un ciclo, consta de las siguientes fases:

1.ª Experimentación y observación de la realidad;
2.ª Primera abstracción, creando los objetos matemáticos;
3.ª Segunda abstracción, estructurando los objetos matemáticos;
4.ª Aplicabilidad y contraste de la teoría matemática sobre la realidad.

Al intentar contabilizar la verificación de un determinado suceso $h \subset P(H)$, se han de realizar pruebas y constatar resultados: es la primera fase, referible al concepto empírico de *frecuencia*.

En posesión de este empirismo, y de sus números, se intenta crear un modelo matemático que, al margen de cualquier experimentación, permita calcular «a priori», lo más aproximadamente posible, resultados aleatorios: se trata de la segunda fase, la creación del objeto matemático *Probabilidad*.

La tercera fase, segunda abstracción, consiste en estructurar axiomáticamente el conjunto de las probabilidades; postulada la base axiomática, se desarrolla la teoremática probabilística.

Finalmente, cerrando el ciclo, la aplicabilidad del modelo probabilístico sobre situaciones reales muestra la utilidad del proceso matemático para resolver la cuestión que lo suscitó: el cálculo de probabilidades sobre sucesos aleatorios. Ahí,

la *teoría de la predicción*, el concepto de *riesgo*, así como las *leyes de* los *grandes números* «acoplan» el modelo probabilístico a la realidad aleatoria de las frecuencias.

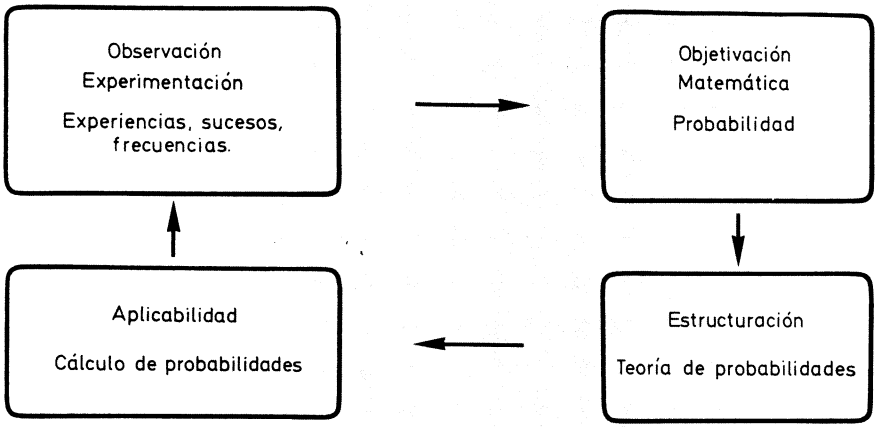


Fig. 14.1

Según esto, parece inevitable iniciar el trabajo matemático con la realización (mejor, no imaginada) de las pruebas que van a dar lugar a la determinación de las frecuencias.

Tras lo dicho, ha quedado claro que esta parte de las Matemáticas es una de las que más base intuitiva tiene en sus cimientos. Las experiencias que suscitan la matematización, aquí son tan próximas, como inevitables.

Sin embargo, mientras que en otras ramas de la matemática la experiencia iniciadora del proceso de abstracción es vivencia adquirida en el normal desarrollo cultural del hombre, y no es necesario provocarlas en el momento del trabajo, en ésta del cálculo de probabilidades es muy conveniente «hacer de verdad» la experiencia, ya que, normalmente, aunque elemental no se tiene incorporada por la praxis, al acerbo cultural subconsciente.

No se quiere dejar esta breve introducción sin intentar destruir el prejuicio que considera todo lo que obedece al azar como irracional. Puede que tal error proceda del concepto vulgar de azar: todo suceso inesperado o que se realiza con sorpresa, fuera de un orden preestablecido; las Matemáticas establecen las inflexibles leyes probabilísticas a las que obedece el azar: el azar matemático.

Una parte moderna de la Matemática de la aleatoriedad es la llamada *teoría de decisiones y juegos de estrategia*. Sus conclusiones respaldan como absolutamente racionales las decisiones que se puedan tomar, basándose en las leyes del azar. Así, ha llegado hasta el gran público la extensa y rigurosa planificación realizada por determinadas marinas de guerra, que con desplazamientos «al azar» de sus submarinos nucleares, han asentado un duro golpe al espionaje desde el mar, de sus enemigos.

14.2. EXPERIENCIAS REALES Y SIMULADAS. TABLAS DE DIGITOS ALEATORIOS

Primera experiencia

Láncese una moneda al aire mil veces y constátese el resultado cara-cruz (C/F) de su reposo.

La tabla de la laboriosa experiencia se inició como se expresa y se totalizaron los resultados que se indican:

Prueba	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª			Total
Suceso C	1					1	1	1		...		520
Suceso F		1	1	1	1				1	...		480

Segunda experiencia

Se dispone de una urna con cinco bolas blancas (B) y cinco negras (N). Se realiza mil veces la siguiente prueba: extraer una bola, al azar, constatar su color y reintegrarla a la urna.

Los resultados fueron los que se registran:

Prueba	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª			Total
Suceso B	1	1	1		1				...		498
Suceso N				1		1	1	1	...		502

Tercera experiencia

Se tiene un montón de cien cartulinas iguales, todas en blanco, excepto una que contiene una determinada información. Se hace mil veces la siguiente prueba: extraer una cartulina, al azar, constatar si es blanca o contiene información y reintegrarla de nuevo al montón, que se barajará concienzudamente, antes de realizar la segunda prueba.

Resultaron los sucesos que se registran y se consiguieron los totales que se tabulan.

Prueba	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª			Total
Suceso I							1	...		6
Suceso B	1	1	1	1	1	1		...		994

Método de simulación o «Monte-Carlo». Tablas de dígitos aleatorios

Ante lo engorroso y largo de la ejecución real de las experiencias y, principal-

mente, para evitar *tendencias o sesgos** en las series estadísticas de realización, se elaboran hoy las llamadas «tablas de dígitos aleatorios», de lo que se encargan los ordenadores electrónicos, convenientemente programados, para que tenga

1.° cada cifra del conjunto 0, 1, 2, . . . 9, la misma posibilidad de aparecer;
2.° los grupos de dos o más dígitos se obtengan de forma independiente.

Así, los números dados al azar por la máquina, mediante una *aplicación* que se denomina *código de simulación*, se transforman en sucesos que obedecen a leyes de probabilidad determinadas. Todo ello permite disponer de una secuencia de sucesos, de manera fácil, habiendo quedado eliminada toda posibilidad de sesgo, y en series tan largas como se quieran.

Simulación de la primera experiencia

Código de simulación: Los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 / 5, 6, 7, 8, 9 se corresponden con C / F

Leyendo los dígitos de la primera columna de la tabla, estos son los resultados que se observan y los totalizados que se registran

Lectura	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª		Total
Suceso C							2			3			511
Suceso F	8	7	5	7	8	6		9	6		6		

Simulación de la segunda experiencia

Código de simulación: Los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 / 5, 6, 7, 8, 9 se corresponden con B / N

Como puede comprenderse, el resultado de la simulación es idéntico al registrado en la tablilla precedente.

Simulación de la tercera experiencia

Son 100 las posibilidades de extracción de cartulinas. Si se consideran los grupos de dos dígitos, desde el 00 hasta el 99, también son 100 los que se consiguen formar. Como es una la cartulina que contiene información y 99 las que están en blanco, disponemos el siguiente código de simulación**:

* Inadvertidas sistematizaciones de realización defectuosa pueden producir sucesos «torcidos», inclinados a producirse, con preferencia, fuera del azar que se desea.

** Se está obviando toda referencia a probabilidad. Cuando llegue el momento se volverá sobre estas simulaciones y se dirá —por ejemplo— para esta experiencia 3.ª que, como la probabilidad de leer 0, 1, 2, . . . 9, es 1/10 y la computadora se ha programado para obtener de forma independiente los grupos de dígitos (segunda condición de programación), la probabilidad de cada uno de los grupos binarios 00, 01, . . . 99, es $1/10 \cdot 1/10 = 1/100$, probabilidad que coincide con la de extracción de una determinada cartulina.

El grupo de dígitos 00 / Los grupos de dígitos 01, . . . 99 — se corresponde(n) con — cartulina informativa / cartulina blanca

He aquí lo conseguido sobre la tabla de dígitos aleatorios (no se usa la séptima columna de cada agrupación vertical).

Lectura	1.ª	2.ª	3.ª	. . .	92.ª	. . .	230.ª	. . .	373.ª	. . .	Total
Suceso I					00		00		00		8
Suceso B	87	78	59								992

Ejemplo

*De simulación de una secuencia de experiencias, de probabilidades preestablecidas**

El núcleo viario del centro comercial de una ciudad se esquematiza en el siguiente gráfico unidireccional:

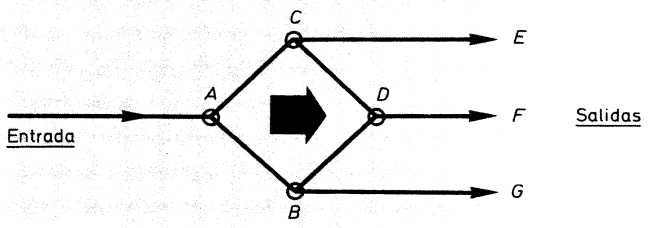


Fig. 14.2

Al nudo *A* pueden acceder en cada minuto, cero, uno, dos, tres o cuatro vehículos, considerándose las dos salidas de su bifurcación con idéntica densidad de tráfico.

Del tráfico que llega a *B* y a *C*, se estima que las tres cuartas partes de cada uno de ellos se canaliza hacia *D*, escogiendo las salidas laterales *E* y *G* la cuarta parte de los vehículos que a ellos llegan.

Se desea simular la circulación viaria de esta red, durante quince minutos.

Código de simulación
Entrada: Los dígitos 0, 1 ⟶ 0 vehículos
2, 3 ⟶ 1 »
4, 5 ⟶ 2 »
6, 7 ⟶ 3 »
8, 9 ⟶ 4 »

* Remitimos a la nota anterior.

DIGITOS ALEATORIOS (I)

8758485	4798746	9966106	6607921	9952566	244107	1891548	9152326
7890021	4969192	8804964	8107053	9397643	3422379	5955485	4931498
5989617	1554221	5418770	8524631	2378858	7551463	3899056	5431170
7495513	6092549	9095674	9741103	6585554	1843391	1790361	4151646
8796622	5414917	3319900	1185141	7231747	2724210	1259537	3039334
6900167	4046991	2180440	6659721	334366	2068707	9402948	7799327
2169426	2822608	7410813	9061402	7671089	4473916	7803696	6556929
9108312	5637507	1850229	363809	5530791	9910462	9685655	8919768
6347709	7808338	9720642	8048809	807071	2403144	7155221	1303026
3421163	8799740	2007968	2850147	9029164	8523661	9879491	2563994
6468547	5735331	6195062	5552389	7558770	5381119	4257786	7116640
4379763	2228820	3955049	3670908	6430008	5541874	5381171	2410155
6030390	4490940	2672129	5614310	9636693	7291370	7017978	6485536
5751412	6138647	5069169	5167190	5380615	5778976	6248317	5479114
6639825	526924	3403119	5676399	3430321	9494334	6093111	1109654
1819927	932671	9216681	6906046	8486143	8762438	6199343	8334112
4210581	256474	3643609	9553390	4527854	1186613	6368986	7534401
7885527	9503551	6051562	777407	200386	4205648	3430411	2731634
5516107	8511930	1426618	1952337	8874454	5675693	4184068	4023165
6482379	2685768	7773307	2467764	4846817	6871020	7604769	3789428
4293647	1657032	1299364	2882895	5603090	7672479	5607064	4590075
7076868	1150535	3211394	8913545	4578720	7250410	2293977	8510172
415240	5899890	1662178	6874055	6284729	5841878	8488701	8355304
3733517	7203361	9618512	2880818	718297	8382421	3829852	7537318
4620510	1765461	9008171	8159874	7885706	3875367	2280848	8806785
2313079	4617408	6886731	9763716	6601713	1736828	1005552	401859
3361180	6550350	9051479	5355720	671004	5824542	8908213	1028401
5996486	6723309	6371475	7719068	8971128	4355155	5390772	3148239
372480	3900729	52056	5205770	766114	7744752	9573484	7738135
267450	1961479	9361825	8517636	6849391	4437623	4981216	9948690
4861194	9628952	4022964	7477214	8656606	4644709	9958795	7950388
8073168	6885513	8654568	9957786	1855601	1513533	2380788	662926
2550461	9336432	3064444	4358774	8572646	2206908	6087633	6663622
5193030	1185580	376209	1587028	6136287	2534471	9980240	7071203
2605052	1989486	8491445	3043298	1836777	3630982	5254894	8850523
5809094	5199853	8917266	6704921	9974128	9500475	7235694	7909884
2338057	2839381	5993772	408197	8505236	7357637	7598699	9373459
7852462	2753637	5849660	315221	9244388	2629334	2576510	1795052
7581719	9334847	7773610	2628033	5805704	1181922	4840193	8403861
6861426	5533808	1450012	8895798	324678	1885883	8393196	3386231
4778617	8195621	6166170	3236432	3923060	4410469	1155276	7237430
3027093	3025689	910294	8230564	1190736	3069339	7699406	8572380
2139624	5686323	4861318	7990996	4194111	3245702	1727213	1151961

Deferencia de la Escuela de Informática y Centro de Cálculo de la Universidad de Deusto.

DIGITOS ALEATORIOS (II)

1366848	7833434	4698969	7692909	3866730	3964199	8984626	8229959
8518121	7039092	5571464	76954	318545	1218684	4445199	5703038
4211439	3941286	5744766	8997019	2279221	2702153	5699928	9880185
7981760	8968890	1977498	1144976	9072372	4129447	3125328	1586945
1393719	4079808	1935373	4893962	1945411	7626802	8252114	871464
959757	7915361	8854351	1887855	1637969	2837118	2280982	8151827
8382125	6926304	6118700	4375462	1184471	7727663	5705736	4685451
6761076	8397399	9534705	1631636	3977473	9180110	9283397	3079393
4925783	1840160	6708907	3692003	1771852	7403085	8471843	4203292
8973160	6009331	5297542	7701267	8529725	1866945	4434144	9802354
8906827	5219772	1157184	9965154	9376267	6571212	5040864	1104274
1257867	7608731	4331580	7510902	6081190	8889019	8603404	1619254
2284887	9136030	4252199	3288918	1463717	9182041	1918791	8874374
5977127	5993392	2166204	9056693	4844324	7555701	1735292	2410439
8845000	1376050	8651298	9523336	9278331	9959962	6254794	7889105
1041480	5246929	2108255	5427168	3588709	2687736	3828036	8778591
8219216	307978	7874923	4477730	5992073	5652870	9988557	9055514
4436067	5116770	776018	8605176	4646893	434769	786576	806531
7759997	9301201	5967232	2092578	8850377	4269062	5960973	7344282
416931	6403043	4665877	367873	214344	7975203	5922116	3755870
9236175	1614215	6559712	4830338	9944618	6194664	7666421	246546
2481481	2669973	3686507	8089284	5357135	9339254	7821311	2874576
6855653	5262729	9875495	1888406	2450983	7710238	4202581	5823344
7116837	290922	7693995	3545666	2028041	257253	3291146	7431601
4969286	2931309	2864275	803866	9044722	7035537	798720	1490483
1754414	7112131	6883061	7289185	1787560	5122691	4648102	1784389
8873411	7180962	3225073	4721781	9305027	3334131	6259541	7550066
8964522	5836537	4338520	3502281	1967006	281508	3985991	1382376
2420333	2080609	700655	5478447	6564784	82681	1413030	7734052
3570753	8383230	8162597	3526514	7695707	4435610	7352298	4193295
8989089	6194878	6267463	1850870	4698055	1530496	6900475	7628388
3666047	3340790	7050319	2234798	9955917	9622322	8130675	2183148
9922808	9888513	25806	1158219	6717060	9878391	8816802	3995289
4620510	1765461	9008171	8159874	7885706	3875367	2280848	8806785
2313079	4617408	6886731	9763716	6601713	1736828	1005552	401859
3361180	6550350	9051479	5355720	671004	5824542	8908213	1028401
5996486	6723309	6371475	7719068	8971128	4355155	5390772	3148239
372480	3900729	52056	5205770	766114	7744752	9573484	7738135
267450	1961479	9361825	8517636	6849391	4437623	4981216	9948690
4861194	9628952	4022964	7477214	8656606	4644709	9958795	7950388
8073168	6885513	8654568	9957786	1855601	1513533	2380788	662926
2550461	9336432	3064444	4358774	8572646	2206908	6087633	6663522
5193030	1185580	376209	1587028	6136287	2534471	9980240	7071203

Bifurcación A: Los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 → vehículos a *C*
5, 6, 7, 8, 9 → vehículos a *B*

Birfurcaciones C y B: Los grupos de dígitos

00, . . . 24 → vehículos a salidas laterales *E* o *G*
25, . . . 99 → vehículos hacia el nudo *D*

Registro de simulación

Minuto	*Entradas*		*Bifurcación A*		*Bifurcaciones C, B*	
	Dígito	*Vehículos*	*Dígitos*	*Dirección*	*Dígitos*	*Dirección*
1	8	4	8-7-5-7	*B-B-B-B*	87-78-59-74	*D-D-D-D*
2	7	3	8-6-2	*B-B-C*	87-69-21	*D-D-E*
3	5	2	9-6	*B-B*	91-63	*D-D*
4	7	3	3-6-4	*C-B-C*	34-64-43	*D-D-D*
5	8	4	6-5-6-1	*B-B-B-C*	60-57-66-18	*D-D-D-E*
6	6	3	4-7-5	*C-B-B*	42-78-55	*D-D-D*
7	2	1	6	*B*	64	*D*
8	9	4	4-7-0-3	*C-B-C-C*	42-70-04-37	*D-D-E-D*
9	6	3	4-2-3	*C-C-C*	46-23-33	*D-E-D*
10	3	1	5	*B*	59	*D*
11	6	3	0-0-4	*C-C-C*	03-02-48	*E-E-D*
12	4	2	8-2	*B-C*	80-25	*D-D*
13	6	3	5-2-5	*B-C-B*	51-26-58	*D-D-D*
14	5	2	2-7	*C-B*	23-78	*E-D*
15	6	3	7-6-4	*B-B-C*	75-68-47	*D-D-D*

Algunas conclusiones

Han circulado en esos quince minutos cuarenta y un vehículos.
El máximo de entradas lo registran los minutos primero, quinto y octavo; y el mínimo, los minutos séptimo y décimo.
En cada minuto han entrado, al menos, un vehículo.
La calle *AC* la han utilizado dieciocho vehículos; y la *AB*, veintitrés.
Han confluido en *D* treinta y cuatro coches, que han salido por *F*
La salida *G* no se ha utilizado y la *E* la usaron siete vehículos.

14.3. FRECUENCIAS ABSOLUTA Y RELATIVA

14.3.1. Definiciones

Sea el suceso A un subconjunto del espacio muestral H; entonces, $A \in P(H)$. Si en una serie de n pruebas se ha presentado el suceso A n' veces, diremos que

la frecuencia absoluta de A es n', y su frecuencia relativa n'/n. Los dos conceptos se denotan así:

$$n(A) = n' \quad ; \quad h(A) = \frac{n'}{n}$$

Es claro que, con toda generalidad, sucede que $n_i = h_i \cdot n$.

También resulta evidente que la suma de las frecuencias absolutas de todos los sucesos presentados en una serie de n pruebas ha de ser igual a n,

$$\Sigma n_i = n$$

La frecuencia relativa de un suceso, h_i, puede expresarse —según convenga— en tanto por uno, tanto por ciento, tanto por mil o partes por millón.

Ejemplo

La frecuencia relativa de un suceso que en cincuenta pruebas se ha presentado diez veces es

$$h = \frac{10}{50} = 0{,}2 \sim 20\,\% \sim 200\,‰ \sim 200\,000 \text{ ppm}$$

Ejercicio

Establézcanse las frecuencias relativas $h(C)$, $h(N)$ y $h(I)$, referibles a los sucesos de las experiencias del número 3.42.

14.3.2. Estabilización de las frecuencias. Ley del azar

Sea el suceso C = «obtener cara» en la categoría de pruebas «lanzar una moneda al aire y observar su cara superior en reposo».

Se tabulan las frecuencias absolutas $n(C)$ y relativas $h(C)$, en función del número de pruebas realizadas, n.

Número de pruebas n	*Frecuencia absoluta* $n(C)$	*Frecuencia relativa* $h(C) = n(C)/n$
100	51	0,51
200	98	0,49
300	140	0,46
400	205	0,51
500	249	0,495
600	302	0,50
700	340	0,485
800	410	0,51
900	455	0,50
1 000	511	0,511

Se realiza ahora la prueba «lanzar un dado homogéneo sobre la mesa y leer su cara superior en reposo». Se han conseguido los siguientes números, referidos al suceso E = «Obtener y leer dos puntos».

n	$n(E)$	$h(E)$
100	20	0,2
200	41	0,205
300	50	0,166
400	62	0,155
500	85	0,170
600	104	0,173
700	117	0,167
800	134	0,167
900	151	0,165
1 000	165	0,165

Sobre la columna de las frecuencias relativas de los dos ejemplos desarrollados y, mejor aún, sobre las gráficas que se dibujan a continuación, puede observarse que, a medida que se eleva el número de pruebas, n, las frecuencias, h, «tienden» a estabilizarse alrededor de un valor determinado, que en el caso de las monedas es 0,5 y en el de los dados, 1/6.

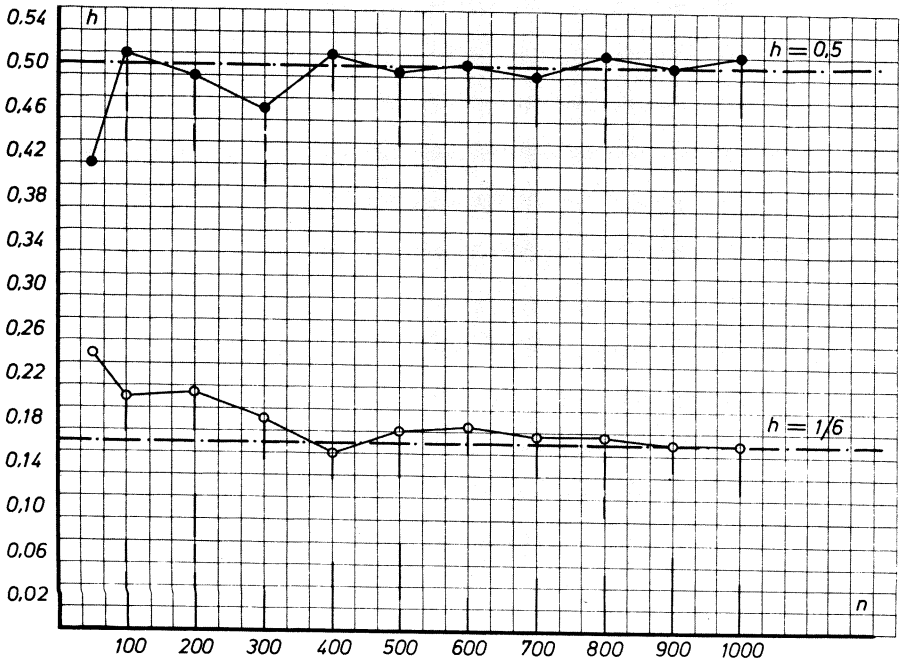


Fig. 14.3

Esta «tendencia» constituye la *Ley del azar*, que dicta:

> En series largas de pruebas, la frecuencia relativa de un suceso «tiende» a estabilizarse alrededor de un número, que coincide con su probabilidad.

Tal formulación resulta de lo más indeseable en Matemáticas y ello, entre otras, por estas dos razones:

a) no explicita cuánto se aproxima la frecuencia a la probabilidad, ni cuál ha de ser la longitud de la serie para conseguir una determinada aproximación;
b) de ningún modo, una justificación empírica demuestra una proposición.

Sin embargo, puede admitirse sin recelos esta Ley del azar, pues J. Bernoulli, en 1713, al demostrar la «Ley débil de los grandes números», solventó las dificultades apuntadas, respaldando de este modo el empirismo de la ley del azar.

14.3.3. Propiedades de las frecuencias

I. La frecuencia relativa de un suceso A, es un racional del cerrado $[0, 1]$
En efecto: siendo n el número de pruebas realizadas y $n(A)$ la frecuencia absoluta de A, es claro que

$$0 \leq n(A) \leq n;$$

dividiendo por n

$$0 \leq \frac{n(A)}{n} \leq 1;$$

o sea:

$$\boxed{0 \leq h(A) \leq 1}$$

II. Las frecuencias relativas del suceso seguro y del suceso imposible son, respectivamente, 1 y 0.
Si H es el suceso seguro, realizadas n pruebas, se ha presentado n veces; luego, $n(H) = n$, y

$$\boxed{h(H) = n/n = 1} \quad ;$$

por definición, el suceso imposible no se ha presentado ninguna vez en las pruebas, luego

$$\boxed{h(\phi) = 0/n = 0}$$

III. La frecuencia relativa del suceso-reunión de dos incompatibles es igual a la suma de las frecuencias relativas de los sucesos reunidos.
Sean los sucesos A y B incompatibles: $A \cap B = \phi$.
Sus frecuencias absolutas en n pruebas son:

$$n(A) = n_1$$
$$n(B) = n_2$$

Para que se presente el suceso-reunión, $A \cup B$, habrá de presentarse A o B, y nunca ambos, por ser incompatibles; de modo que

$$n(A \cup B) = n_1 + n_2$$
$$h(A \cup B) = \frac{n_1 + n_2}{n} = n_1/n + n_2/n;$$

$$\boxed{h(A \cup B) = h(A) + h(B)}$$

14.4. PROBABILIDAD, MODELO MATEMATICO DE LA FRECUENCIA

14.4.1. Concepto intuitivo de probabilidad. Postulado de indiferencia. Regla de Laplace

Antes de nada, quede claro que el concepto que se desarrolla en este número es completamente insuficiente, desde un punto de vista matemático, porque, como se verá en seguida, no se respetan las más elementales reglas de definición, como es que «en la definición no puede entrar el término definido». Habrá que esperar al siguiente número, en el que se desarrolla el concepto de probabilidad axiomáticamente, desde un punto de vista rigurosamente matemático.

Sensibilizado el concepto de probabilidad como la frecuencia de un suceso, cuando el número de pruebas se repite «ilimitadamente», considérese un espacio muestral H formado por n sucesos *equiprobables* e *incompatibles*; es decir, un sistema completo de sucesos:

$$H = \{h_1, h_2, \ldots h_n\}$$

Según lo establecido, sus probabilidades cumplen las siguientes expresiones:

$$p(H) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} p(h_1) + p(h_2) + \ldots + p(h_n) = 1 \\ p(h_1) = p(h_2) = \ldots = p(h_n) \end{array}\right\} \Rightarrow p(h_i) = \frac{1}{n}$$

Si un suceso $A \in P(H)$, se obtiene mediante la reunión de los m incompatibles

$$A = h_1 \cup h_2 \cup \ldots \cup h_m,$$

sucede que

$$p(A) = p(h_1) + p(h_2) + \ldots + p(h_m)$$
$$p(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots \ (m \text{ veces})$$

$$\boxed{p(A) = \frac{m}{n}}$$

La expresión recuadrada constituye la regla de Laplace, que dice:

> La probabilidad de un suceso es el cociente entre los casos favorables (éxitos) y casos posibles, considerados *equiprobables e incompatibles.*

Ejemplo 1

¿Qué probabilidad existe de obtener un número múltiplo de 3, al lanzar un dado homogéneo sobre la mesa?

$$H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$
$$p(h_1) = p(h_2) = \ldots = p(h_6) = \frac{1}{6}$$
$$A = h_3 \cup h_6$$
$$p(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

o lo que es igual: casos favorables = 2
casos posibles = 6

$$p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 2

¿Qué probabilidad hay de conseguir 4 puntos, al levantar una ficha de dominó?

casos posibles: 28
casos favorables: 0 + 4
1 + 3
2 + 2

$$p(A) = \frac{3}{28}$$

14.4.2. Concepto axiomático de probabilidad

Inaceptable el concepto intuitivo de probabilidad, por las razones expuestas anteriormente, KOLMOGOROV, en 1933, estableció definitivamente la probabilidad de un modo axiomático.

Sea H el espacio muestral y $P(H)$ —el conjunto de sus partes—, el universal al que pertenecen todos los sucesos del discurso.

Se denomina probabilidad a una aplicación $P(H)$ en el conjunto de los números reales, $\mathfrak{R}$,

$$P(H) \xrightarrow{p} \mathfrak{R},$$

que obedece a los siguientes axiomas:

I. $\forall A \in P(H), \quad 0 \leq p(A) \leq 1$*
II. $p(H) = 1$
III. $A \in P(H), \ B \in P(H) \,/\, A \cap B = \phi \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Si en lugar de definir la aplicación sobre $\mathfrak{R}$, se define sobre el cerrado real $[0, 1]$ el axioma 1 debe suprimirse.

14.4.3. Teoremas

14.4.3.1. *Consecuencias inmediatas de los axiomas*

1) La probabilidad del suceso contrario de otro es igual a la unidad menos la probabilidad del directo.

Los sucesos contrarios A y $\bar{A}$ forman un sistema completo de sucesos; por tanto,

$$A \cup \bar{A} = H$$
$$p(H) = p(A) + p(\bar{A})$$
$$1 = p(A) + p(\bar{A})$$

$$\boxed{p(\bar{A}) = 1 - p(A)}$$

Como corolario de este teorema, resulta que

$$\boxed{p(\phi) = 0}$$

En efecto:

$$\bar{H} \equiv \phi$$

$$p(\bar{H}) = 1 - p(H) = 1 - 1 = 0$$

---

* En rigor, debería escribirse solamente $0 \leq p(A)$, puesto que la cota superior se puede deducir teoremáticamente.

2) Si el suceso A está incluido en el B, entonces la probabilidad de A es menor o igual que la de B

$$A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$$

Su elemental justificación se deja como ejercicio para el lector.

14.4.3.2. *Teorema de la probabilidad total*

La probabilidad del suceso-reunión de dos sucesos es igual a la suma de las probabilidades de los reunidos, menos la de su intersección. Simbólicamente:

$$\forall A \in p(H),\ \forall B \in P(H),\ p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Para su demostración ha de usarse el teorema-extensión del axioma III, pero, para poderlo aplicar, ha de establecerse el suceso $A \cup B$ como reunión de sucesos incompatibles y, entonces, se podrá establecer que la probabilidad de la reunión es la suma de las probabilidades de los reunidos.

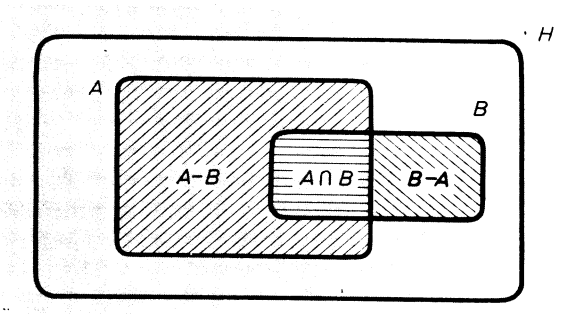


Fig. 14.4

El álgebra de sucesos justifica de manera elemental lo que expresa el diagrama de Venn de la figura; o sea, que

$$(A \cup B) = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B).$$

Al ser incompatibles los tres sucesos reunidos, el teorema-extensión del axioma III permite establecer

$$p(A \cup B) = p(A - B) + p(B - A) + p(A \cap B) \qquad [1]$$

Del mismo modo, los sucesos A y B están constituidos por la reunión de incompatibles,

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \quad ; \quad B = (B - A) \cup (A \cap B),$$

lo que permite escribir para sus probabilidades (axioma III),

$$p(A) = p(A - B) + p(A \cap B)$$
$$p(B) = p(B - A) + p(A \cap B)$$

$$p(A) + p(B) = p(A - B) + p(B - A) + p(A \cap B) + p(A \cap B) \qquad [2]$$

Sustituyendo [1] en [2],

$$p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B);$$

despejando,

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Claro es que el resultado del teorema se muestra acorde con el axioma III, si se trata de sucesos incompatibles, ya que, entonces, el tercer término del segundo miembro de la fórmula se anula, $p(\phi) = 0$.

Así, pues, la expresión recuadrada es del todo general y sirve tanto para sucesos compatibles como incompatibles.

La asociatividad del álgebra de sucesos permite generalizar la fórmula para más de dos sucesos. Se brinda al lector, como ejercicio, la demostración del teorema para tres sucesos, cuya conclusión ha de ser

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo 1

¿Qué probabilidad hay de que al levantar una ficha de dominó se obtenga un número de puntos mayor que 9 o un múltiplo de 4?

Los veintiocho sucesos elementales posibles se tabulan en el siguiente cuadro:

	0	1	2	3	4	5	6
0	00	10	20	30	40	50	60
1	xx	11	21	31	41	51	61
2	xx	xx	22	32	42	52	62
3	xx	xx	xx	33	43	53	63
4	xx	xx	xx	xx	44	54	64
5	xx	xx	xx	xx	xx	55	65
6	xx	xx	xx	xx	xx	xx	66

$$A = \{n > 9\} = \{(4 \cdot 6),\ (5 \cdot 5),\ (5 \cdot 6),\ (6 \cdot 6)\}$$
$$B = \{n = \dot{4}\} = \{(0 \cdot 4\},\ (1 \cdot 3),\ (2 \cdot 2),\ (2 \cdot 6),\ (3 \cdot 5),\ (4 \cdot 4),\ (6 \cdot 6)\}$$
$$A \cap B = \{(6 \cdot 6)\}$$

$$p(A \cup B) = \frac{4}{28} + \frac{7}{28} - \frac{1}{28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

El resultado es coincidente con el obtenido si se plantea directamente el suceso-reunión, $A \cup B$, formado por once sucesos elementales:

$$\left.\begin{array}{l}\text{casos favorables: } 10\\ \text{casos posibles: } 28\end{array}\right\} \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

Ejemplo 2

A un simposio de Ecología asisten cien congresistas, de los cuales, ochenta hablan inglés y cuarenta francés. ¿Qué probabilidad existe de que dos especialistas, escogidos al azar, se entiendan sin intérprete?

Sea el suceso I = «entenderse en inglés» y el F = «entenderse en francés». Es claro que el suceso del problema es «ENTENDERSE», lo que pueden hacer en inglés o en francés; es decir, la probabilidad pedida es la del suceso $(I \cup F)$.

De los datos del problema se infiere que hay congresistas bilingües, que dan lugar al suceso «entenderse en inglés y en francés», a saber, al suceso $(I \cap F)$.

El número de bilingües es:

$$\text{card}(I \cup F) = \text{card}(I) + \text{card}(F) - \text{card}(I \cap F);$$
$$100 = 80 + 40 - \text{card}(I \cap F) \quad ; \quad \text{card}(I \cap F) = 20$$

Probabilidad de entenderse en inglés

Casos favorables: todas las parejas que se puedan formar con los ochenta especialistas que dominan ese idioma

$$\binom{80}{2}$$

Casos posibles: todas las parejas distintas que se pueden formar con los cien congresistas: $\binom{100}{2}$

$$p(I) = \frac{\binom{80}{2}}{\binom{100}{2}}$$

Probabilidad de entenderse en francés

Casos favorables: $\binom{40}{2}$

Casos posibles: $\binom{100}{2}$

$$p(F) = \frac{\binom{40}{2}}{\binom{100}{2}}$$

Probabilidad de entenderse en francés y en inglés

Casos favorables: $\binom{20}{2}$

Casos posibles: $\binom{100}{2}$

$$p(I \cap F) = \frac{\binom{20}{2}}{\binom{100}{2}}$$

Probabilidad de «ENTENDERSE» sin intérprete (T. de la probabilidad total)

$$p(I \cup F) = \frac{\binom{80}{2}}{\binom{100}{2}} + \frac{\binom{40}{2}}{\binom{100}{2}} - \frac{\binom{20}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{3\,160 + 780 - 190}{4\,950} = 0{,}757$$

14.4.4. Probabilidades condicionadas

14.4.4.1. *Concepto*

Sean A y B dos sucesos compatibles, no imposibles, procedentes de la misma categoría de pruebas.

$$A \in P(H), \quad B \in P(H), \quad A \neq \phi, \quad B \neq \phi; \quad A \cap B \neq \phi$$

Entiéndase que A es el subconjunto de H, formado por los i sucesos elementales

$$A = \{h_1, h_2, \ldots h_i\}$$

Se denomina probabilidad de B condicionada a A —denotada $p(B/A)$— a la probabilidad de B sobre el espacio probabilístico* A.

La anterior definición significa que se ha verificado A, puesto que es el nuevo universal estocástico. Tal vez ayude a comprender el establecimiento el siguiente

Ejemplo

Una jaula de lotería contiene 10 bolas de corcho, numeradas con las cifras 0, 1, . . . 9, y otras cinco, de hierro, con las cinco primeras marcas numéricas de las anteriores. Todas las bolas son de idéntica apariencia y no se tiene acceso a ellas.

Tras las vueltas reglamentarias, se vierte una bola sobre un pocillo especial, transparente, lleno de agua; y sólo se puede observar que se hunde. Consecuentemente, se sabe que la bola vertida es de hierro.

El problema consiste en esto: ¿Qué probabilidad hay de que la bola sumergida sea un 4?

Analicemos despacio la respuesta:

a) Nominemos los sucesos así:

A = «obtener bola de hierro»
B = «conseguir bola marcada con un 4»

Ambos sucesos pertenecen al espacio probabilístico, H, formado por los quince sucesos posibles. Sus probabilidades sobre H son

$$p(A) = 5/15 = 1/3; \quad p(B) = 2/15;$$

* Recibe este nombre todo espacio muestral booleano sobre el que se ha definido la aplicación «probabilidad».

b) Pero el hecho observado (la sumergibilidad de la bola) hace que el suceso cuya probabilidad se pide ya no pertenezca a la categoría de pruebas anteriormente apuntada; su espacio probabilístico ya no es H, con sus 15 sucesos elementales, sino que —por haberse producido A— ése es, precisamente, el muestral del problema

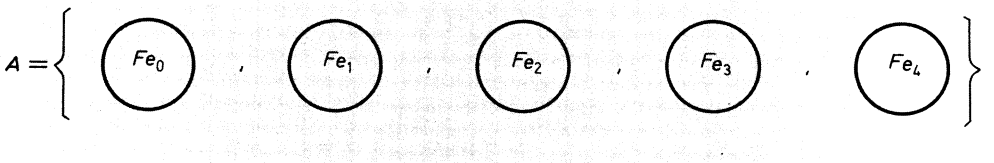


Fig. 14.5

$$\left.\begin{array}{l}\text{casos favorables: } 1\\ \text{casos posibles: } 5\end{array}\right\} p(B/A) = \frac{1}{5}$$

La probabilidad de que, habiendo conseguido bola de hierro, esté marcada con un 4 es 1/5.

14.4.4.2. *Teorema de la probabilidad compuesta*

La probabilidad del suceso-intersección de dos no imposibles es igual al producto de la probabilidad de uno de ellos por la del otro, condicionada a él.

Sea el espacio probabilístico $H = \{h_1, h_2, \ldots h_n\}$, constituido por n sucesos elementales.

Considérese el suceso $A \subset H$, formado por n_1 sucesos elementales, de los n de H; y el suceso $B \subset H$, con n_2 sucesos elementales, de los n del muestral.

Finalmente, sea $A \cap B \subset H$ un suceso constituido por n_3 sucesos elementales de los de H.

Es claro entonces que las probabilidades respectivas son:

$$p(A) = n_1/n \quad ; \quad p(B) = n_2/n \quad ; \quad p(A \cap B) = n_3/n$$

De otro lado, considérese el suceso B/A, que, como se dijo, ya no pertenece a la misma categoría de pruebas que los anteriores, puesto que su espacio muestral es A.

Casos favorables de B/A: son aquellos en los que, habiéndose presentado A, también lo hace B; obviamente son n_3.

Casos posibles de B/A: los de su espacio muestral: n_1

$$p(B/A) = n_3/n_1$$

dividiendo numerador y denominador por n,

$$p(B/A) = \frac{n_3/n}{n_1/n} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \qquad [1]$$

> La probabilidad de un suceso condicionado a otro es igual al cociente de la probabilidad de su intersección y la del condicionante.

Puede despejarse de la expresión [1] la probabilidad de la intersección, resultando

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)} \qquad [1']$$

cuya lectura corresponde al enunciado con que se inició este epígrafe.

Ejemplo

¿Qué probabilidad hay de que, habiendo extraído de una baraja de 52 naipes una carta «corazones», sea figura?

A = «corazones» ; B = «figura» ; $A \cap B$ = «figura de corazones»

$$p(A) = 13/52 = 1/4 \quad ; \quad p(A \cap B) = 3/52$$

$$p(B/A) = \frac{3/52}{13/52} = 3/13$$

14.4.4.3. *Independencia de sucesos*

Dos sucesos A y B de un mismo espacio probabilístico son *independientes* si

$$p(B) = p(B/A),$$

siendo *dependientes* en caso contrario.

Ejemplo 1

En la categoría de pruebas «lanzar un dado al aire y leer su cara superior en reposo» se consideran los sucesos A = «obtener un número mayor que 4» y B = = «conseguir un múltiplo de 3»; o sea:

$$H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$
$$A = \{h_5, h_6\} \; ; \quad B = \{h_3, h_6\}$$
$$B \cap A = \{h_6\}$$
$$\left.\begin{array}{l} p(A) = 2/6 = 1/3 \quad ; \quad p(B) = 2/6 = 1/3 \\ p(B/A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)} = \dfrac{1/6}{1/3} = 1/2 \end{array}\right\} p(B) \neq p(B/A)$$

A y B son sucesos dependientes.

Ejemplo 2

En la misma categoría de pruebas del ejercicio anterior, sean los sucesos A = «obtener un número impar» y B = «conseguir un número mayor o igual a 5»

$$A = \{h_1, h_3, h_5\} \quad ; \quad B = \{h_5, h_6\}$$
$$B \cap A = \{h_5\}$$
$$\left.\begin{array}{l} p(A) = 3/6 = 1/2 \quad ; \quad p(B) = 2/6 = 1/3 \\ p(B/A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)} = \dfrac{1/6}{1/2} = 1/3 \end{array}\right\} p(B) = p(B/A)$$

A y B son sucesos independientes.

TEOREMA 1. La relación de independencia de sucesos en el espacio probabilístico (H, p) es simétrica; es decir:

$$\forall A \subset H, \quad \forall B \subset H, \quad p(B) = p(B/A) \Leftrightarrow p(A) = p(A/B)$$

En efecto:

$A) \Rightarrow$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad [1]$$
$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) \qquad [2]$$

sustituyendo [2] en [1],

$$p(A/B) = \frac{p(A) \cdot p(B/A)}{p(B)},$$

y por hipótesis,

$$p(A/B) = p(A).$$

$B) \Leftarrow$

$$p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} \qquad [3]$$
$$p(B \cap A) = p(B) \cdot p(A/B) \qquad [4]$$

sustituyendo [4] en [3],

$$p(B/A) = \frac{p(B) \cdot p(A/B)}{p(A)},$$

y por hipótesis,

$$p(B/A) = p(B).$$

TEOREMA 2. Dos sucesos incompatibles, no imposibles, nunca son independientes; o sea:

$$A \subset H, \quad B \subset H, \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(B/A) \neq p(B)$$

En efecto:

$$A \cap B = \phi \Rightarrow p(A \cap B) = 0;$$

entonces,

$$p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = 0.$$

Como $p(B) \neq 0$, es claro que

$$p(B/A) \neq p(B), \text{ c. q. d.}$$

TEOREMA 3. Inversión de condiciones.

El teorema de la probabilidad compuesta permite escribir para dos sucesos A y B, de la misma categoría de pruebas:

$$\begin{array}{ccc} p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} & ; & p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) & ; & p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) \end{array}$$

Igualando,

$$p(B/A) = \frac{p(B)}{p(A)} \cdot p(A/B);$$

puesta de la forma

$$\boxed{\frac{p(B/A)}{p(B)} = \frac{p(A/B)}{p(A)}}$$

aparece una fórmula muy utilizada en la teoría de la información.

14.4.4.4. *Teorema de Bayes*

El teorema de Bayes resuelve el llamado «problema de la probabilidad de las causas», que consiste en lo siguiente*:

Establecidos:

a) Un espacio probabilístico $H = \{h_1, h_2, h_3\}$

$$h_1 \cup h_2 \cup h_3 = H$$
$$h_1 \cap h_2 = h_1 \cap h_3 = h_2 \cap h_3 = \phi$$

* Se considera oportuno realizar todo el desarrollo con un espacio probabilístico de tres sucesos. La generalización a n sucesos constitutivos, sin aportar nada nuevo, obligaría a una farragosa notación, que tal vez dificultara la comprensión.

b) Probabilidades «a priori»

$$p(h_1) \quad ; \quad p(h_2) \quad ; \quad p(h_3)$$

c) Un suceso $A \subset H$

d) Probabilidades condicionadas o *verosimilitudes*

$$p(A/h_1) \quad ; \quad p(A/h_2) \quad ; \quad p(A/h_3)$$

Pretensiones: Conocer las probabilidades «a posteriori»

$$p(h_1/A) \quad ; \quad p(h_2/A) \quad ; \quad p(h_3/A)$$

Cálculo de la probabilidad «a posteriori» $p(h_1/A)$

1.º Según el teorema de la probabilidad compuesta

$$p(h_1 \cap A) = p(h_1) \cdot p(A/h_1)$$
$$p(A \cap h_1) = p(A) \cdot p(h_1/A)$$

2.º Por ser conmutativa la intersección de sucesos,

$$p(A) \cdot p(h_1/A) = p(h_1) \cdot p(A/h_1);$$

despejando,

$$p(h_1/A) = \frac{p(h_1) \cdot p(A/h_1)}{p(A)} \qquad [1]$$

3.º $A = A \cap H = A \cap (h_1 \cup h_2 \cup h_3) = (A \cap h_1) \cup (A \cap h_2) \cup (A \cap h_3)$

4.º Las tres intersecciones son sucesos incompatibles; por tanto,

$$p(A) = p(A \cap h_1) + p(A \cap h_2) + p(A \cap h_3)$$

5.º Según el teorema de la probabilidad compuesta y conmutatividad de la intersección de sucesos,

$$\left.\begin{array}{l} p(A \cap h_1) = p(h_1 \cap A) = p(h_1) \cdot p(A/h_1) \\ p(A \cap h_2) = p(h_2 \cap A) = p(h_2) \cdot p(A/h_2) \\ p(A \cap h_3) = p(h_3 \cap A) = p(h_3) \cdot p(A/h_3) \end{array}\right\} +$$

$$p(A) = p(h_1) \cdot p(A/h_1) + p(h_2) \cdot p(A/h_2) + p(h_3) \cdot p(A/h_3) \qquad [2]$$

Sustituyendo [2] en [1],

$$p(h_1/A) = \frac{p(h_1) \cdot p(A/h_1)}{p(h_1) \cdot p(A/h_1) + p(h_2) \cdot p(A/h_2) + p(h_3) \cdot p(A/h_3)}$$

De igual modo se calcularían $p(h_2/A)$ y $p(h_3/A)$.

Entendiendo que el sistema completo de sucesos planteado, fuera de n sucesos, la fórmula de Bayes, en su forma general, es

$$p(h_i/A) = \frac{p(h_i) \cdot p(A/h_i)}{\sum_{j=1}^{j=n} p(h_j) \cdot p(A/h_j)}$$

Ejemplo

Se tiene una batería de cinco bolsas opacas, idénticas, contenedoras de bolas iguales, según estos datos:

bolsa A = cuatro bolas blancas
bolsa B = tres bolas blancas y una negra
bolsa C = dos bolas blancas y dos negras
bolsa D = una blanca y tres negras
bolsa E = cuatro bolas negras.

Con los ojos vendados, se toma una bola de una de las bolsas, advirtiéndose, luego de la extracción, que se trata de una bola negra.

¿Cuáles son las probabilidades de que proceda de cada una de las cinco bolsas?

Las probabilidades de obtener bola de una de las cinco bolsas son:

$$p(A) = p(B) = p(C) = p(D) = p(E) = 1/5$$

Las verosimilitudes respectivas son:

$$p(N/A) = 0/4 \ ; \ p(N/B) = 1/4 \ ; \ p(N/C) = 2/4 \ ; \ p(N/D) = 3/4 \ ; \ p(N/E) = 1$$

Según Bayes, las probabilidades *a posteriori*, es decir, las probabilidades de que, siendo bola negra, proceda de cada una de las bolsas son:

$$p(A/N) = \frac{1/5 \cdot 0}{1/5(0 + 1/4 + 2/4 + 3/4 + 1)} = 0 \ ; \ p(B/N) = 1/10$$

$$p(C/N) = 2/10 \ ; \ p(D/N) = \frac{1/5 \cdot 3/4}{1/5(0 + 1/4 + 2/4 + 3/4 + 1)} = 3/10$$

$$p(E/N) = 4/10$$

14.4.4.5. *La probabilidad condicionada es una probabilidad*

No debe sorprender el título del epígrafe. Se ha establecido lo que hemos llamado «probabilidad condicionada» y, si se es consecuente, se habrá de justificar, si con ello continuamos dentro del concepto de espacio probabilístico o si, por el contrario, el nuevo objeto matemático no obedece a la axiomática definitoria de la probabilidad.

Ciertamente, las probabilidades condicionadas son probabilidades. En efecto:

I. $p(B/A) \in [0, 1]$,

ya que la probabilidad condicionada es el cociente entre dos reales positivos, siendo el numerador menor o igual que el denominador:

$$A \cap B \subset B \Rightarrow p(A \cap B) \leq p(B)$$

II. $p(H/A) = 1$

Efectivamente:

$$p(H/A) = \frac{p(H \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$$

III. Si $B_1 \cap B_2 = \phi$, entonces $p(B_1 \cup B_2/A) = P(B_1/A) + p(B_2/A)$,

puesto que

$$p(B_1 \cup B_2/A) = \frac{p[(B_1 \cup B_2) \cap A]}{p(A)} = \frac{p[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)]}{p(A)};$$

sucediendo que $B_1 \cap B_2 = \phi \Rightarrow (B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A) = \phi$, se puede escribir:

$$p(B_1 \cup B_2/A) = \frac{p(B_1 \cap A) + p(B_2 \cap A)}{p(A)} = p(B_1/A) + p(B_2/A)$$

14.5. TECNICA DE RESOLUCION. DIEZ PROBLEMAS RESUELTOS

14.5.1. Una urna contiene tres bolas blancas y dos negras. ¿Cuál es la probabilidad de que dos bolas, extraídas al azar, sean ambas blancas?

a) *Simultáneamente*

$$p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

b) *Sucesivamente*:

H_1: extraer bola blanca la primera vez
H_2: extraer bola blanca la segunda vez
$H_1 \cap H_2$: extraer bola blanca y bola blanca

$$p(H_1 \cap H_2) = p(H_1) \cdot p(H_2/H_1)$$

H_1 y H_2 son sucesos independientes: $p(H_2/H_1) = p(H_2)$

$$p(H_1 \cap H_2) = p(H_1) \cdot p(H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

14.5.2. ¿Qué probabilidad hay de conseguir un número que empiece por 3, de todos los de seis cifras que se pueden formar con los guarismos 3, 3, 3, 5, 0, 0?

Casos posibles: número de números de seis cifras

$$PR_6^{3,2} - PR_5^3 = 40$$

Casos favorables: de esos cuarenta, empiezan por 3

$$PR_5^{2,2} = 30$$
$$p = 3/4$$

14.5.3. De una baraja de cuarenta naipes se extrae un paquete de cinco cartas. ¿Qué probabilidad hay de que ese paquete contenga dos ases?; y, ¿cuál de que ese grupo de cinco cartas, tenga, al menos, dos ases?

A) *Casos favorables*: hay todas estas maneras de obtener dos ases: $\binom{4}{2}$; por cada manera de ésas, los dos ases pueden estar acompañados de tres cartas no ases de todos estos modos: $\binom{36}{3}$.

Luego todos los casos favorables de obtener un par de ases son

$$\binom{4}{2} \quad \binom{36}{3}$$

Casos posibles: todos los posibles paquetes de cinco cartas con los cuarenta naipes de la baraja son $\binom{40}{5}$

$$p = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{36}{3}}{\binom{40}{5}}$$

B) El suceso H = «obtener al menos dos ases» tiene por suceso contrario $\bar{H}$ = «obtener cero ases o un as»; es decir:

$$\bar{H} = H_0 \cup H_1$$

$$p(H) = 1 - p(\bar{H}) = 1 - p(H_0 \cup H_1) = 1 - p(H_0) - p(H_1)$$

$$p(H) = 1 - \frac{\binom{36}{5} + \binom{4}{1} \cdot \binom{36}{4}}{\binom{40}{5}}$$

También se podía haber resuelto mediante la reunión triple

$$H = H_2 \cup H_3 \cup H_4$$

14.5.4. Se dispone de dos cajas iguales, contenedoras de dos bolas blancas, tres rojas y cuatro negras, la primera, y de tres blancas, cuatro rojas y cinco negras, la segunda. Se toma, al azar, una bola de cada una de las cajas. ¿Qué probabilidad hay de que se hayan conseguido del mismo color?

El suceso H = «obtener par isocromo» puede producirse, si se verifica uno de estos tres:

$$\left.\begin{array}{l} B = \text{«obtener par blanco»} \\ R = \text{«obtener par rojo»} \\ N = \text{«obtener par negro»} \end{array}\right\} H = B \cup R \cup N$$

Los sucesos B, R y N son incompatibles (i).

De otro lado, para que se produzca el suceso B, han de realizarse los sucesos

b_1 = «obtener bola blanca de la primera caja» y
b_2 = «obtener bola blanca de la segunda caja», de modo que
$B = b_1 \cap b_2$;

de igual manera,

$R = r_1 \cap r_2$;
$N = n_1 \cap n_2$

Los sucesos b_1 y b_2, r_1 y r_2, n_1 y n_2 son sucesos independientes (ii).
Componiendo ahora el análisis que se ha hecho del suceso H, resulta:

$$H = (b_1 \cap b_2) \cup (r_1 \cap r_2) \cup (n_1 \cap n_2).$$

La probabilidad pedida, teniendo en cuenta las observaciones (i) e (ii) es

$$p(H) = p(b_1) \cdot p(b_2) + p(r_1) \cdot p(r_2) + p(n_1) \cdot p(n_2)$$
$$p(H) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{12} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{12} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{12} = \frac{19}{54}$$

14.5.5. Se lanza al aire una moneda trucada diez veces consecutivas, de modo que la probabilidad de obtener «cara», cada vez es 3/4. ¿Qué probabilidad hay de obtener, al menos, una vez cruz?

H = «obtener, al menos, una vez cruz»
$\bar{H}$ = «obtener siempre cara»
$\bar{H} = c_1 \cap c_2 \ldots \cap c_{10}$

Los sucesos $c_1, c_2, \ldots c_{10}$ son independientes, de modo que

$$p(\bar{H}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \text{(10 veces)}$$

$$p(H) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

14.5.6. Se propone a un equipo de tres alumnos la resolución de un problema. Se estima, en función de sus evaluaciones, que la probabilidad de que lo resuelva el primero es 1/2; la de que lo haga el segundo, 1/3 y 1/4 la probabilidad de que lo consiga resolver el tercero. ¿Cuál es la probabilidad de que resuelva el problema el equipo?

Siendo A, B y C los sucesos de resolución para cada uno de los alumnos, el suceso H cuya probabilidad se pide es $H = A \cup B \cup C$.

Como A, B y C son sucesos compatibles, el teorema de la probabilidad total, para tres sucesos, resuelve la cuestión:

$$p(H) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

$$p(H) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Adviértase que A, B y C son sucesos independientes.

14.5.7. Tres jugadores, A, B y C, lanzan una moneda homogénea, al aire, en ese orden, continuando el juego hasta que uno de ellos consiga obtener cruz. ¿Cuál es la probabilidad de ganar que tiene cada uno de los tres jugadores?

Analicemos el suceso A = «sacar cruz el primero».

En principio, puede ganar en la primera tirada o en la segunda o en la tercera o en la n-sima, de modo que

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

Pero para que se pueda verificar A_2, es necesario que en la primera tirada hayan fallado A, B y C, de modo que el suceso A_2 está formado por la intersección cuádruple

$$A_2 = \bar{a}_1 \cap \bar{b}_1 \cap \bar{c}_1 \cap a_2.$$

Si es en la tercera tirada, A_3, donde gana el primero, análogamente

$$A_3 = \bar{a}_1 \cap \bar{b}_1 \cap \bar{c}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \bar{b}_2 \cap \bar{c}_2 \cap a_3$$

El proceso se repite hasta la n-sima tirada, lo que supone para el suceso A la siguiente composición:

$$A = a_1 \cup (\bar{a}_1 \cap \bar{b}_1 \cap \bar{c}_1 \cap a_2) \cup (\bar{a}_1 \cap \bar{b}_1 \cap \bar{c}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \bar{b}_2 \cap \bar{c}_2 \cap a_3) \cup \ldots$$

Los reunidos son incompatibles y los intersecados independientes, de manera que

$$p(A) = p(a_1) + p(a_1) \cdot p(b_1) \cdot p(c_1) \cdot p(a_2) + \ldots$$
$$p(A) = 1/2 + (1/2)^4 + (1/2)^7 + \ldots$$

Se trata de la suma de los términos de una progresión geométrica, ilimitada, decreciente, de razón 1/8. El límite de esa suma proporciona la probabilidad buscada:

$$p(A) = \frac{1/2}{1 - 1/8} = \frac{4}{7}$$

Del mismo modo se calculan las probabilidades de ganar de los otros dos jugadores, que son

$$p(B) = \frac{2}{7}$$

$$p(C) = \frac{1}{7}$$

14.5.8. A y B establecen el siguiente juego, sobre una baraja de cuarenta cartas: si al extraer un naïpe, resulta ser figura o as, gana A, perdiendo en todos los demás casos de extracción. ¿Cuáles deberán ser las apuestas o posturas de A y de B para que el juego sea equitativo?

En juegos de azar, se denomina esperanza matemática de un jugador al producto del premio por la probabilidad de obtenerlo. Y un juego es equitativo, si las puestas de los jugadores coinciden con sus esperanzas matemáticas.

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = \text{premio} \times p_A = \text{premio} \times 16/40 \\ P(B) = \text{premio} \times p_B = \text{premio} \times 24/40 \end{array}\right\} \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{2}{3}$$

14.5.9. Se tienen en una urna 100 bolas blancas, 200 negras y 300 verdes. ¿Qué probabilidad hay de sacar en tres ensayos, con remplazamiento, una bola de cada color? Y, ¿cuál sin remplazamiento?

A) *Con remplazamiento* (volviendo a introducir la bola)

Conseguir la secuencia $b - n - v$, es un suceso formado por la intersección de tres independientes, de modo que su probabilidad es el producto de las de sus componentes

$$\frac{100}{600} \cdot \frac{200}{600} \cdot \frac{300}{600} = 1/36$$

Como el suceso pedido se verifica cuando lo hacen cualquiera de las P_3 secuencias a que da lugar la considerada, y el conseguir una u otra de esas secuencias son sucesos incompatibles, la probabilidad buscada es la suma de $P_3 = 6$ sumandos iguales:

$$p = P_3 \cdot 1/36 = 1/6$$

B) *Sin remplazamiento*

Analícese que el resultado es $P_3 \cdot \frac{100}{600} \cdot \frac{200}{599} \cdot \frac{300}{598}$

14.5.10. Un trirreactor tiene como coeficientes de seguridad, intrínsecos, para sus motores, 0,99 para el central y 0,97 para cada uno de sus dos laterales. El avión puede maniobrar con sus tres motores, sólo con el central o con los dos laterales, abatiéndose a tierra en los demás casos. ¿Qué probabilidad hay de que llegue a destino?

El suceso H = «llegar a destino» se puede verificar de estos tres modos incompatibles:

A = «con los tres motores»
B = «con los dos laterales»
C = «con el central»

$$H = A \cup B \cup C$$

A su vez, los sucesos A, B y C están formados por la intersección de los sucesos independientes que se indican (denotamos I a los laterales y Φ al central)

$$A = I \cap \Phi \cap I$$
$$B = I \cap \bar{\Phi} \cap I$$
$$C = \bar{I} \cap \Phi \cap \bar{I}$$

Resulta entonces, que la probabilidad pedida es

$$p(H) = p^2(I) \cdot p(\Phi) + p^2(I) \cdot p(\Phi) + p^2(\bar{I}) \cdot p(\Phi) = 0{,}94$$

14.6. APLICABILIDAD. AUTOMATISMOS Y DESTREZAS

1. En una urna hay cincuenta bolas numeradas con los cincuenta primeros números naturales. ¿Qué probabilidad hay de sacar las cincuenta bolas en el orden natural?

2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener «de mano» póker de reyes, de una baraja de cincuenta y dos cartas?

3. Al destapar una pieza de dominó, ¿qué probabilidad existe de conseguir una suma de puntos múltiplo de 4?; ¿y múltiplo de 6?

4. Se lanzan nueve monedas al aire. ¿Qué probabilidad hay de conseguir cinco caras y cuatro cruces?

5. ¿Qué probabilidad existe de obtener, de mano, «full de ases»?

NOTA. La jugada «full de ases» la constituyen tres ases y una pareja (=dos cartas iguales).

6. ¿Cuál es la probabilidad de que lanzando tres dados se obtengan nueve puntos?; ¿cuál la de obtener diez?

7. En una bolsa hay b bolas blancas y n negras. Un operador extrae k bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que resulten i blancas y $k - i$ negras?

8. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados n veces, se obtenga, al menos, un seis doble?

¿Cuántas tiradas habrían de realizarse para que esa probabilidad llegara a valer 0,5?

9. ¿Cuál es la probabilidad de torpedear un barco, sabiendo que sólo pueden lanzarse tres torpedos y que la probabilidad de hacer blanco en cada uno de los disparos es 0,25?

10. La probabilidad de un suceso A es 0,1. Calcúlese la probabilidad de que el suceso se verifique al menos cien veces en mil pruebas.

Alhambra